

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРА НЕЙТРОНОВ И ДРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТЫХ ВОДОРОДОСОДЕРЖАЩИХ СИСТЕМАХ

Н. Б. Бабичев, В. Г. Морозов, А. А. Севастьянов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В случае однородных оптически толстых водородосодержащих систем с примесями делящихся веществ и поглотителей нейтронов найдены приближенные решения кинетического уравнения. Полученные теоретические результаты удовлетворительно согласуются с экспериментом и могут оказаться полезными для тестирования соответствующих математических методик численного решения спектрального уравнения переноса нейтронов в системах, в которых необходимо учитывать тепловое движение ядер водорода.

Введение

В данной работе исследуются оптически толстые однородные системы, состоящие из полиэтилена (CH_2) или воды (H_2O) с примесями делящихся материалов и поглотителей нейтронов. Задача о спектре решается отдельно в области замедления нейтронов и в тепловой области. Затем полученные спектры сшиваются при некотором значении энергии нейтронов $E_* \gg T$ (T – температура среды) в надтепловой области. Задача определения спектра в тепловой области решается в рамках так называемой газовой модели (предполагается, что атомы в молекулах воды и полиэтилена свободны). Используются и другие упрощающие физические предположения, о которых говорится по мере изложения теоретических материалов.

1. Спектр быстрых и надтепловых нейтронов

Для функции распределения нейтронов $\tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega})$ (E – энергия нейтрона, $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$, \vec{V} – вектор скорости нейтрона) запишем кинетическое уравнение, справедливое в точке наблюдения с радиус-вектором \vec{r} в момент времени t

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega}) + (\vec{\Omega} \nabla) \tilde{\Psi} + \alpha_t \tilde{\Psi} = \int dE' d\vec{\Omega}' K(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) \tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E', \vec{\Omega}') + S, \quad (1)$$

где S – источник нейтронов спектра деления ($g = g(E)$), равный

$$S(t, \vec{r}, E) = g(E) \int d\vec{\Omega}' \int dE' v(E') \alpha_f(t, \vec{r}, E') \tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E', \vec{\Omega}'); \quad (2)$$

$v(E')$ – среднее число вторичных нейтронов, возникающее в одном акте деления ядра нейтроном с энергией E' .

Далее предполагается, что макроскопические сечения рассеяния, деления, захвата и полное зависят только от энергии нейтрона, т. е. $\alpha_s = \alpha_s(E)$, $\alpha_f = \alpha_f(E)$, $\alpha_c = \alpha_c(E)$, $\alpha_t = \alpha_s + \alpha_f + \alpha_c = \alpha_t(E)$.

Приняв квазистационарное приближение ($\tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) e^{\lambda t}$), для упрощения ядра в интеграле столкновений (1) используем следующие физические предположения. Будем считать, что сброс энергии нейтронов происходит только при рассеянии на водороде, а рассеяние на всех других веществах приводит лишь к изменению направления полета нейтрона.

В этом случае справедлива следующая суперпозиция:

$$K(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) = K_H(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) + K_0(E', \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \delta(E' - E); \quad (3)$$

$$K_H(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) = \frac{\alpha_H(E')}{2\pi E'} \delta\left(\vec{\Omega}' \vec{\Omega} - \sqrt{\frac{E}{E'}}\right). \quad (4)$$

В соотношении (4) (см., например, [1]) $E' \geq E$, а при $E' < E$ $K_H = 0$. Индексы «H» и «0» отмечают соответственно столкновения на водороде и на ядрах всех ос-

гальных веществ. Кинетическое уравнение теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{V} \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + (\vec{\Omega} \nabla) \Psi + \alpha_t \Psi = \int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \alpha_H(E') \int d\vec{\Omega}' \Psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + \\ + \int d\vec{\Omega}' K_0(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \Psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + g(E) \int_0^\infty dE' v(E') \alpha_f(E') \int d\vec{\Omega}' \Psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}'). \end{aligned} \quad (5)$$

Введем обозначения скалярного и векторного потоков

$$\Psi(\vec{r}, E) = \int d\vec{\Omega} \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}); \quad (6)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, E) = \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (7)$$

и проинтегрируем (5) по $\vec{\Omega}$ с учетом того, что $\int d\vec{\Omega} K_0(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \alpha_S(E)$. После этого усредним кинетическое уравнение по объему системы. Тогда получим

$$H(E) \Psi(E) = \int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \alpha_H(E') \Psi(E') + g(E) \int_0^\infty dE' v(E') \alpha_f(E') \Psi(E'); \quad (8)$$

$$H(E) = \alpha_H(E) + \alpha_c(E) + \alpha_f(E) + \frac{\lambda}{V(E)} + W(E); \quad (9)$$

$$W(E) = \frac{\int d\vec{r} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, E)}{\int d\vec{r} \Psi(\vec{r}, E)} = \frac{\int d\vec{S} \vec{j}(E)}{\int d\vec{r} \Psi(\vec{r}, E)} \quad (10)$$

– эффективное сечение поглощения нейтронов, связанное с их утечкой (интегралы в числителе и знаменателе берутся соответственно по поверхности и по объему системы); $V(E) = b_0 \sqrt{E}$ – скорость нейтрона (b_0 – известная константа).

Для бесконечной среды Ψ от \vec{r} не зависит. В случае оптически толстой системы принято приближение постоянства спектра нейтронов в пространстве и $\Psi(E)$ – это усредненный по объему системы спектр.

Используя нормировочное условие

$$\int_0^\infty dE' v(E') \alpha_f(E') \Psi(E') = 1 \quad (11)$$

и помня нормировку спектра делительных нейтронов

$$\int_0^\infty dE' g(E') = 1, \quad (12)$$

из (8) для плотности столкновений

$$q(E) = H(E) \Psi(E) \quad (13)$$

получим уравнение

$$q(E) = \int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \frac{\alpha_H(E')}{H(E')} q(E') + g(E). \quad (14)$$

После дифференцирования (14) по энергии нейтрона имеем

$$\frac{dq(E)}{dE} + \varphi(E) q(E) - \frac{dg(E)}{dE} = 0; \quad (15)$$

$$\varphi(E) \equiv \frac{1}{E} \frac{\alpha_H(E)}{H(E)}. \quad (16)$$

Решение дифференциального уравнения (15) имеет следующий вид:

$$q(E) = \left\{ C_1 + \int_0^E dE' \frac{dg(E')}{dE'} \exp \left[\int_E^{E'} dE'' \varphi(E'') \right] \right\} \exp \left[- \int_0^E dE' \varphi(E') \right]; \quad (17)$$

$$C_1 = - \int_0^\infty dE' \frac{dg(E')}{dE'} \exp \left[\int_0^{E'} dE'' \varphi(E'') \right] \quad (18)$$

– константа, определяемая условием $E \rightarrow \infty$, $\Psi(E) \rightarrow 0$, $q(E) \rightarrow 0$.

Подставляя (18) в (17)

$$q(E) = - \int_E^{\infty} dE' \frac{dg(E')}{dE'} \exp \left[\int_E^{E'} dE'' \varphi(E'') \right], \quad (19)$$

получаем

$$q(E) = g(E) + \int_E^{\infty} dE' g(E') \varphi(E') \exp \left[\int_E^{E'} dE'' \varphi(E'') \right]. \quad (20)$$

Переходя от $q(E)$ к $\Psi(E)$ по формуле (13) и вспоминая определение (16) функции $\varphi(E)$, для искомого спектра быстрых и промежуточных нейтронов приходим к следующему итоговому ответу:

$$\Psi(E) = \frac{1}{H(E)} \left\{ g(E) + \int_E^{\infty} \frac{dE'}{E'} \frac{\alpha_H(E') g(E')}{H(E')} \exp \left[\int_E^{E'} \frac{dE''}{E''} \frac{\alpha_H(E'')}{H(E'')} \right] \right\}. \quad (21)$$

Функция $H(E)$ определена формулой (9). Точно такой же ответ получится при любом другом источнике нейтронов. Рассмотрим стационарную ($\lambda = 0$) задачу в бесконечной ($W = 0$) среде, состоящей из ядер водорода ($H(E) = \alpha_H(E)$), при действии моноэнергетического источника $g(E) = \delta(E - E_0)$. Тогда из формулы (21) получается решение

$$\Psi(E) = \frac{\delta(E - E_0)}{\alpha_H(E_0)} + \frac{1}{E \alpha_H(E)}. \quad (22)$$

Если задан источник быстрых нейтронов ($E_0 \geq 1$ МэВ), то вдали от него в области замедления, как известно, элементарное сечение рассеяния $\sigma_H(E) = \text{const} = 20$ барн и, что следовало ожидать, получаем фермиевский спектр

$$\Psi(E) \sim \frac{1}{E}. \quad (23)$$

Очевидно, что в шкале летаргий $u = \ln \left(\frac{E_0}{E} \right)$ это соответствует закону $\Psi_u = \Psi(u) = \text{const}$.

Сделаем следующее замечание. В целях упрощения формул выше молчаливо подразумевалось, что активный материал представлен каким-то одним делящимся изотопом. В случае смеси из разных i -х делящихся веществ в формулах (5), (8), (11) произведение $\nu(E') \alpha_f(E')$ надо заменить на сумму $\sum_i \nu_i(E') \alpha_{fi}(E')$.

При этом предполагается, что делительный спектр у всех активных ядер одинаков, т. е. $g_i(E) = g(E)$. Обобщить представленные выше формулы на случай $g_1(E) \neq g_2(E) \neq g_3(E) \neq \dots$ не представляет труда.

2. Спектр тепловых нейтронов

Для расчета спектра тепловых и эпитепловых нейтронов в бесконечной однородной среде справедлива

приближенная система дифференциальных уравнений Лалетина [2, 3]

$$\frac{dQ(z)}{dz} = G_a(z) N(z); \quad (24)$$

$$Q(z) = \frac{[\langle \xi \rangle G_s(z) M(z)]^2}{\langle \xi \rangle G_s(z) M(z) + \frac{d}{dz} [\langle \xi \rangle G_s M]} \times \frac{d}{dz} \frac{G_s N + \frac{\gamma}{\langle \xi \rangle} G_a N}{G_s M}, \quad (25)$$

где $M(z) = \sqrt{z} e^{-z}$ – максвелловское распределение; $z = \frac{E}{T}$ – безразмерная энергия нейтрона; $N(z)$ – искомый спектр (безразмерная нейтронная плотность); $G_a(z)$ и $G_s(z)$ – соответствующие вероятности исчезновения и рассеяния нейтрона в единицу времени; $\langle \xi \rangle$ – среднелогарифмическая потеря энергии нейтрона при столкновении с ядром;

$$\frac{\gamma}{\langle \xi \rangle} = \frac{1 - a + a \ln a - \frac{1}{2} a (1 - a) \ln^2 a}{(1 - a + a \ln a)^2}, \quad a = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2; \quad (26)$$

A – массовое число ядра; $Q(z)$ – ток нейтронов по энергетической оси.

Система уравнений (24), (25) решается со следующими начальными условиями:

$$Q(0) = 0; \quad \frac{dQ(0)}{dz} = 0. \quad (27)$$

Отметим, что в случае $A = 1$, $\langle \xi \rangle = 1$, $\gamma = 1$ при условии постоянства сечений $\sigma_c = \text{const}$, $\sigma_s = \text{const}$ система уравнений Лалетина (24), (25) точна и эквивалентна дифференциальному уравнению Вигнера – Уилкинса [4]

$$\frac{d}{dz} \left\{ P(z) \frac{d}{dz} [N(z)(G_s + G_a)] \right\} - \left\{ R(z) [G_s(z) + G_a(z)] + \frac{e^{+z}}{\sqrt{z}} \right\} N(z) = 0; \quad (28)$$

$$P(z) = \frac{\sqrt{\pi z} e^{-z}}{e^{-z} + \sqrt{\pi z} \operatorname{erf} \sqrt{z}}; \quad (29)$$

$$R(z) = \frac{P^2 e^{-2z}}{2\sqrt{\pi} z^{3/2}}. \quad (30)$$

Далее будем рассматривать бесконечную однородную водородосодержащую среду с малыми примесями поглотителя и делящегося материала и учитывать рассеяние нейтронов только на атомах водорода. Вероятности взаимодействия нейтронов с веществом в единицу времени выражаются так:

$$G_s(z) \approx G_H(z) = \frac{b_0}{2} \sqrt{\frac{T}{\pi z}} \int_0^\infty dz' \alpha_H(z') \left[e^{(\sqrt{z} - \sqrt{z'})^2} - e^{-(\sqrt{z} + \sqrt{z'})^2} \right]; \quad (31)$$

$$G_a(z) = \frac{b_0}{2} \sqrt{\frac{T}{\pi z}} \sum_i \sqrt{A_i} \int_0^\infty dz' [\alpha_{ci}(z') + \alpha_{fi}(z')] \times \left\{ \exp \left[A_i (\sqrt{z} - \sqrt{z'})^2 \right] - \exp \left[A_i (\sqrt{z} + \sqrt{z'})^2 \right] \right\} + \lambda_\infty. \quad (32)$$

Суммирование ведется по всем компонентам смеси ядер (A_i – массовое число i -го ядра).

В случае тяжелых ядер $\left(\frac{A_i z}{T} \gg 1 \right)$ интеграл (32)

берется методом перевала. Отсюда получаем

$$G_{ai}(z) \approx b_0 \sqrt{zT} (\alpha_{ci} + \alpha_{fi}) + \lambda_\infty.$$

Если система конечна, то следует сделать замену

$$\lambda_\infty \rightarrow \lambda, \quad G_a(z, \lambda_\infty) \rightarrow G_a(z, \lambda) + b_0 \sqrt{zT} W(z). \quad (33)$$

В диффузионном приближении, например, в случае однородного шара

$$W(z) = \frac{\pi l_{tr}(z)}{3R_+^2}, \quad (34)$$

где l_{tr} – транспортный пробег нейтрона; R_+ – экстраполированный радиус шара.

Положив $\langle \xi \rangle = 1$, $\gamma = 1$ (изменение энергии нейтрона учитывается только при столкновениях с ядрами водорода), в системе (24), (25) сделаем замену

$$N(z) = \frac{1}{G_a(z) + G_s(z)} [X(z)M(z)G_s(z) - Q(z)]. \quad (35)$$

Тогда получим

$$\frac{dX}{dz} = \frac{1}{G_a + G_s} \left[G_a X + \frac{Q}{M} \right]; \quad (36)$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{G_a}{G_a + G_s} [G_s X M - Q]; \quad (37)$$

$$Q(0) = 0; \quad X(0) = \frac{G_a(0) + G_s(0)}{G_s(0)}. \quad (38)$$

Переход от (24), (25) к системе дифференциальных уравнений (36), (37) избавляет от необходимости вычислять производные G'_a и G'_s . При $z \rightarrow 0$ в соотношении (37) возникает особенность и оно переходит в

$$\frac{dX}{dz} = \frac{G_a}{G_s} \left(1 + \frac{2}{3} z \right). \quad (39)$$

При отсутствии поглощения решением уравнений (36), (37) является $N(z) = M(z)$. Это очевидный результат. Действительно, отличие спектра термализованных нейтронов от максвелловского (а оно существенно) связано с зависимостью сечения σ_c от энергии. Там, где σ_c велико, происходит "выедание" спектрального диапазона.

Система (36), (37) в рассматриваемом случае слабого поглощения имеет следующие предельные аналитические решения. При $z \ll 1$

$$Q(z) \sim z^{3/2}; \quad N(z) \sim \sqrt{z}. \quad (40)$$

В асимптотическом пределе $z \gg 1$ решением является фермиевский энергетический спектр (см. также (23))

$$Q(z) = \text{const}; \quad N(z) \sim \frac{1}{z^{3/2}};$$

$$\Phi(z) = \sqrt{z} N(z) \sim \frac{1}{z} \sim \frac{1}{E}. \quad (41)$$

3. Определение λ и K_{Φ}

Сшивая усредненные по объему решения разделов 1, 2 в точке $E_* = 20T \gg T$, находим функцию распределения $\Psi(E, \lambda)$ при произвольной энергии нейтрона $0 \leq E \leq \infty$. Собственное значение λ определяется из уравнения баланса нейтронов

$$K(\lambda) = \int_0^\infty dE \Psi(E, \lambda) \times \left\{ [v(E) - 1] \alpha_f(E) - \alpha_c(E) - W(E) - \frac{\lambda}{V(E)} \right\} = 0. \quad (42)$$

Нетрудно убедиться, что

$$K_{\Phi} = 1 + K(\lambda = 0). \quad (43)$$

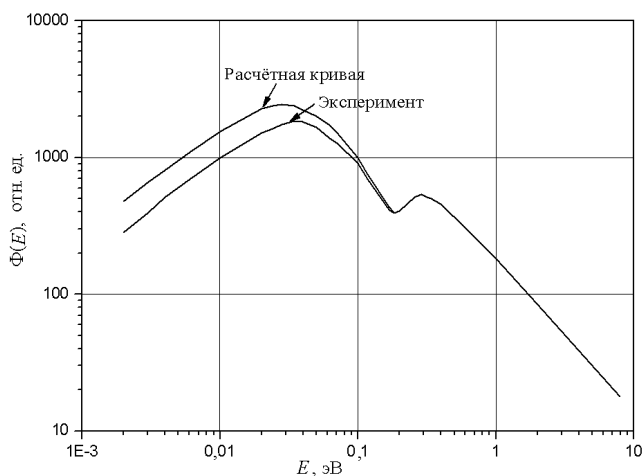
4. Результаты численных расчетов

Так как спектр нейтронов $\Psi(E, \lambda)$ параметрически зависит от λ , то уравнение (42) решалось численно (использовался быстро сходящийся метод последовательных приближений).

Всюду выше функция $W(E)$ предполагалась известной. Однако для ее определения нет достаточно точной аналитической формулы. Величина $W(E)$ определялась интерполяционной формулой, которая была получена на основе диффузионного приближения с калибровкой на численные расчеты по методике "Монте-Карло".

Были выполнены расчеты параметра $\lambda(T) = \lambda_{\infty}(T)$ при различных значениях температуры среды T для случаев бесконечных по размерам систем, состоящих из механических смесей урана с полиэтиленом. Расчеты, в частности, подтвердили тот известный факт, что уран-233 в качестве делящегося материала в водородосодержащей среде значительно более эффективен, чем уран-235.

В качестве примера на рисунке приведены результаты измерений спектра нейтронов в водном растворе сульфата кадмия [5] и соответствующего расчета.



Сравнение расчетного потока $\Phi(E) = \sqrt{EN(E)}$ с измеренным в эксперименте в водном растворе сульфата кадмия

Расхождение расчета с экспериментом наблюдается в области малых энергий нейтронов, так как в ней становится существенным учет влияния химических связей при рассеянии нейтронов на молекулах H_2O . Напомним, что в разделе 2 была принята газовая модель, т. е. атомы предполагались свободными. Уточнить полученные выше формулы за счет учета химических связей Н и О можно, например, путем использования модели Нэлкина для воды [5].

Авторы выражают благодарность С. С. Жихареву, В. А. Кутвицкому, В. С. Нефедову и Б. В. Певницкому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Аналитические формулы запрограммировал и провел все численные расчеты В. М. Повышев.

Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
2. Лалетин Н. И. Дифференциальные уравнения для термализации нейтронов в бесконечных однородных средах. М.: Атомная физика, 1963. Т. 14. Вып. 5. С. 402.
3. Лалетин Н. И. Спектры медленных нейтронов в воде с поглотителями. М.: Атомная физика, 1964. Т. 16. Вып. 5. С. 142.
4. Коген Е. Экспериментальные реакторы и физика реакторов // Доклады иностранных ученых на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (1955 г., г.Женева). М: Гостехиздат. 1956. С. 257.
5. Nelkin M. S. // Phys.Rev. 1961. Vol. 119. P. 741.

Статья поступила в редакцию 09.10.2008.