УДК 539.17

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

Н. Б. Бабичев, Б. В. Беженцев, П. С. Бондарев

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Найдены приближенные аналитические решения трансцендентных уравнений, которые в асимптотической диффузионной теории решаются совместно с уравнением диффузии нейтронов. Полученные аналитические выражения оказались столь точными, что необходимость численного решения трансцендентных уравнений исчезла. В результате этого явную зависимость коэффициентов диффузии нейтронов от различных параметров удалось выразить аналитическими формулами, которые в рамках асимптотической теории не нуждаются в дальнейшем уточнении.

Введение

Если односкоростное кинетическое уравнение с изотропным ядром интеграла столкновений проинтегрировать по углам, то получим

$$\frac{\partial n\left(t,\vec{r}\right)}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}\left(t,\vec{r}\right)=\left(\beta-\alpha\right)Vn\left(t,\vec{r}\right), \tag{1}$$

где V – скорость нейтронов; $\alpha=n_{я}\left(\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c\right)$, $\beta=h\alpha$ – так называемые параметры Пайерлса (далее будем считать, что они постоянны); $h=\dfrac{\upsilon\sigma_f+\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c}$ – активность среды; $n_{я}$ – плотность ядер; $\sigma_s,\sigma_f,\sigma_c$ – микроскопические сечения рассеяния, деления и захвата; υ – среднее количество нейтронов, рождающихся в одном акте деления ядра; $n\left(t,\vec{r}\right)$ и $\vec{j}\left(t,\vec{r}\right)$ – соответственно нейтронная плотность и векторный поток нейтронов в точке с радиусом-вектором $\vec{r}$ в момент времени t.

В диффузионном приближении справедлив известный закон Фика

$$\vec{j}=-D\,\mathrm{grad}(n), \tag{2}$$

использование которого превращает (1) в уравнение диффузии (его надо решать с соответствующими начальными и граничными условиями); D – коэффициент диффузии.

Очевидно, что достоверность решений уравнения диффузии существенно зависит от точности, с которой определен коэффициент диффузии D. Таким образом, значение коэффициента диффузии по существу и решает вопрос о целесообразности использования диффузионного приближения в целях упрощения решения односкоростных задач нейтронной кинетики. Если в элементарной теории D выражается простой формулой

$$D=D_{э}=\frac{V}{3\alpha}, \tag{3}$$

то в асимптотической диффузионной теории [1] (см. также [2, 3]) для определения D требуются численные решения некоторых трансцендентных уравнений. Из-за этого теряется наглядность рабочих формул.

С целью упрощения анализа результатов асимптотической диффузионной теории в данной работе ведется поиск явных аналитических решений указанных трансцендентных уравнений.

В разделе 1, где принято стационарное приближение, кратко представлены основные известные соотношения асимптотической диффузионной теории, определены искомые аналитические решения и изучен вопрос об их точности.

Раздел 2 посвящен обобщению результатов на случай квазистационарных объектов.

1. Стационарное уравнение диффузии в асимптотической теории и аналитические решения трансцендентных уравнений

1.1. Некоторые известные результаты

Значительно более точная, чем элементарная, асимптотическая теория возникла (см. [1, 2, 3]) в результате калибровки решения уравнения диффузии на известное точное решение уравнения переноса нейтронов в бесконечной среде.

В случае размножающей нейтроны среды ($h>1$) стационарное диффузионное уравнение

$$\nabla^2 n\left(\vec{r}\right)+\alpha^2k^2 n\left(\vec{r}\right)=0 \tag{4}$$

решается совместно с трансцендентным уравнением

$$h\,\mathrm{Arctg}(k)=k\,, \tag{5}$$

и для коэффициента диффузии справедливо соотношение

$$D(h)=\frac{(h-1)V}{\alpha\, k^2}\,. \tag{6}$$

Отметим, что стационарное уравнение (4) справедливо в случае критических систем из делящихся материалов.

Если $h<1$ (нейтронопоглощающая среда), то

$$\nabla^2 n(\vec r)-\alpha^2k^2n(\vec r)=0\,; \tag{7}$$

$$h\,\mathrm{Arcth}(k)=k\,; \tag{8}$$

$$D(h)=\frac{(1-h)V}{\alpha\, k^2}\,. \tag{9}$$

Для инертного вещества $D(h=1)=\dfrac{V}{3\alpha}$.

1.2. Приближенные аналитические решения трансцендентных уравнений

Решения нулевого приближения. Рассмотрим сначала случай размножающей среды ($h>1$). Для удобства перепишем уравнение (5) в тождественной форме

$$1-\varphi\,\mathrm{ctg}\,\varphi=\frac{h-1}{h}\,;\quad \left(\varphi=\mathrm{Arctg}(k);\;\; k=\mathrm{tg}\varphi\right). \tag{10}$$

Имеем следующее разложение:

$$\varphi\;\mathrm{ctg}\,\varphi=1-\sum_{m=1}^{\infty}A_m\varphi^{2m}\,; \tag{11}$$

$$A_m=\frac{2^m}{(2m)!}B_m\,; \tag{12}$$

B_m – числа Бернулли; $A_1=\dfrac{1}{3}$; $A_2=\dfrac{1}{45}$; $A_3=\dfrac{2}{945}$; $A_4=\dfrac{1}{4725}$.

Уравнение (10) преобразуем так:

$$\varphi^2+\frac{\varphi^4}{15}=\psi(\varphi,h)\,; \tag{13}$$

$$\psi(h,\varphi)=3\left(\frac{h-1}{h}-\sum_{m=3}^{\infty}A_m\varphi^{2m}\right). \tag{14}$$

Если в правой части соотношения (13) положить

$$\psi=\psi^{[0]}(h)=\frac{3(h-1)}{h}\,, \tag{15}$$

то из (13) следует

$$\varphi^{[0]}=\left[\frac{15}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{15}\psi^{[0]}}-1\right)\right]^{\frac12}=\left\{\frac{15}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4(h-1)}{5h}}-1\right)\right\}^{\frac12}. \tag{16}$$

Приняв $\psi^{[1]}=3\left(\dfrac{h-1}{h}-\dfrac{2}{945}\left(\varphi^{[0]}\right)^6\right)$, получим

$$\varphi^{[1]}=\left\{\frac{15}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{5}\left(\frac{h-1}{h}-\frac{2}{945}\left(\varphi^{[0]}\right)^6\right)}-1\right)\right\}^{\frac12}. \tag{17}$$

Явный вид формулы (17) громоздок, но она полезна. Действительно, из нее и аналогичных соотношений для $\varphi^{[j]}$ при $j\ge 2$ вытекает, что величина $\varphi^{[0]}$ завышена, т. е. $\varphi^{[0]}>\varphi$. Поэтому напрашивается попытка так упростить формулу (16), чтобы это привело к некоторому другому значению φ_0, которое меньше исходного. Для этого сознательно оборвем разложение функции $F(x)=\sqrt{1+ax}$ квадратичным членом: $F(x)\approx 1+\dfrac{ax}{2}-\dfrac{a^2x^2}{8}$. В таком случае вместо (16) получим

$$\varphi_0=\left\{\frac{15}{2}\frac{4}{10}\left(\frac{h-1}{h}\right)\left[1-\frac{4}{20}\left(\frac{h-1}{h}\right)\right]\right\}^{\frac12}. \tag{18}$$

После простых выкладок из этого вытекает искомое решение нулевого приближения

$$\varphi_0(h)=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{3}{5}(h-1)(4h+1)}\,; \tag{19}$$

$$k_0(h)=\sqrt{\frac{3}{5}(h-1)(4h+1)}\,. \tag{20}$$

В итоге вместо решения системы из двух уравнений (4), (5) теперь с теми же начальным и граничными условиями достаточно решить одно уравнение диффузии

$$\nabla^2 n(\vec r)+\frac{3}{5}(h-1)(4h+1)\alpha^2 n(\vec r)=0\,. \tag{21}$$

Полученное аналитическое решение приводит к следующему коэффициенту диффузии нейтронов:

$$D_0(h)=\frac{5V}{3\alpha(4h+1)}\,. \tag{22}$$

Очевидно, что при $h=1$ (инертная среда), как и должно быть, выполняется равенство

$$D_0(h=1)=\frac{V}{3\alpha}\,. \tag{23}$$

Пусть теперь $h<1$. При замене $\varphi\to i\varphi$, где i – мнимая единица, уравнение (8) переходит в (5). Отсюда следует, что

$$\varphi_0(h<1)=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{3}{5}(1-h)(4h+1)}\,. \tag{24}$$

Таким образом, при любых значениях активности в нулевом приближении справедливо решение

$$\varphi_0(h)=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{3}{5}|h-1|(4h+1)}\,. \tag{25}$$

Легко показать, что уравнение (21) и формула (22) для коэффициента диффузии имеют место при произвольных h.

Элементарная теория диффузии, как известно, требует выполнения неравенства

$$|h-1| << 1, \qquad (26)$$

а условие справедливости асимптотической теории является менее жестким. Поэтому в подразделе 1.4 рассматривается достаточно широкий диапазон $0,5 \le h \le 2$ изменения активности среды.

1.3. Уточненные аналитические решения

Рассмотрим случай $h > 1$ и будем решать уравнение (10). Уточненное решение уравнения $h\varphi = \mathrm{tg}(\varphi)$ будем искать в виде $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$, где $|\Delta\varphi| << \varphi_0$. Записав тангенс суммы, заменим $\mathrm{tg}(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi$ и получим поправку к φ_0

$$\Delta\varphi = \frac{h\varphi_0 - \mathrm{tg}(\varphi_0)}{1-h+h\varphi_0\,\mathrm{tg}(\varphi_0)} \approx \frac{h\varphi_0 - \mathrm{tg}(\varphi_0)}{1-h+(h\varphi_0)^2}. \qquad (27)$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{h\varphi_0 - \mathrm{tg}(\varphi_0)}{1-h+(h\varphi_0)^2}, \qquad (28)$$

где φ_0 определяется формулой (25).

Нет необходимости рассматривать отдельно случай $h < 1$. Произведем замену в (28) $\varphi_0 \to i\varphi_0$, $\varphi_1 \to i\varphi_1$ и сразу получим искомый ответ

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{h\varphi_0 - \mathrm{th}(\varphi_0)}{1-h-(h\varphi_0)^2}. \qquad (29)$$

Нулевое приближение можно записать в виде одного выражения сразу для двух случаев, а для первого приближения так сделать нельзя.

Если в выражениях (28) и (29) вместо φ_0 подставить φ_1, то можно получить второе приближение и так далее.

Выражения для k_1 и D_1 аналогичны формулам для k_0 и D_0, нужно только заменить φ_0 на φ_1:

$$k_1 = h\varphi_1; \qquad (30)$$

$$D_1 = \frac{|h-1|V}{\alpha\, k_1^2}, \qquad (31)$$

где φ_1 имеет вид (28) или (29) в зависимости от знака $(h-1)$.

Если в формулы (30) и (31) подставить $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$ и разложить их по параметру $\Delta\varphi/\varphi_0$, то можно записать:

$$k_1 = k_0 + \Delta k, \quad \Delta k = h\Delta\varphi; \qquad (32)$$

$$D_1 = D_0 - \Delta D, \quad \Delta D = D_0 \frac{2\Delta\varphi}{\varphi_0}. \qquad (33)$$

1.4. О точности полученных аналитических решений

Итак, нами были получены приближенные формулы (22) и (33) для коэффициента диффузии в нулевом и первом приближении.

Проверим, насколько точны эти формулы на примере нескольких систем в случаях поглощающих ($h < 1$) и размножающих ($h > 1$) нейтроны веществ. Ниже приведена таблица, включающая значения для коэффициента диффузии, промежуточные вычисления и относительные ошибки (в процентах) на отрезке $0,5 \le h \le 2$. Помимо ранее использованных обозначений введены следующие:

$$\delta\varphi_i = \frac{|\varphi - \varphi_i|}{\varphi} 100\ \%, \quad i = 0,\ 1;$$

$$d = \frac{D}{D_э} = \frac{3|h-1|}{k^2}, \quad D_э = D(h=1) = \frac{V}{3\alpha};$$

$$d_i = \frac{3|h-1|}{k_i^2}, \quad i = 0,\ 1;$$

$$\delta d_i = \frac{|d - d_i|}{d} 100\ \%, \quad i = 0,\ 1;$$

$D_э$ – коэффициент диффузии в элементарной теории.

Для k не приводятся значения относительных ошибок, потому что они слабо отличаются от ошибок для φ.

Зависимости коэффициентов диффузии и других параметров от активности среды

h	0,5	0,7	0,8	0,9	1,1	1,5	1,7	2,0
φ	1,91501	1,18376	0,88801	0,58381	0,51751	0,96740	1,06693	1,16556
φ_0	1,89737	1,18149	0,88741	0,58373	0,51746	0,96609	1,06469	1,16190
φ_1	1,91569	1,18378	0,88802	0,58381	0,51751	0,96740	1,06693	1,16554
$\delta\varphi_0$ (%)	0,92122	0,19211	0,06788	0,01379	0,00962	0,13550	0,20985	0,31454
$\delta\varphi_1$ (%)	0,03545	0,00102	0,00011	0,00001	$< 10^{-5}$	0,00002	0,00029	0,00146
k	0,95750	0,82863	0,71041	0,52543	0,56926	1,45110	1,81378	2,33112
k_0	0,94868	0,82704	0,70993	0,52536	0,56921	1,44914	1,80997	2,32379
k_1	0,95784	0,82864	0,71041	0,52543	0,56926	1,45110	1,81377	2,33109
d	1,63610	1,31074	1,18886	1,08666	0,92575	0,71235	0,63834	0,55207
d_0	1,66667	1,31579	1,19048	1,08696	0,92593	0,71429	0,64103	0,55556
d_1	1,63494	1,31071	1,18886	1,08666	0,92575	0,71235	0,63834	0,55208

δd_0(%)	1,86822	0,38533	0,13589	0,02759	0,01923	0,27156	0,42102	0,63206
δd_1(%)	0,07087	0,00205	0,00021	0,00002	$< 10^{-5}$	0,00003	0,00058	0,00291

2. Обобщение результатов на случай квазистационарных систем

Уравнение диффузии нейтронов

$$\frac{\partial n(t,\vec{r})}{\partial t} - D\nabla^2 n(t,\vec{r}) = (\beta-\alpha)Vn(t,\vec{r}) \quad (34)$$

в квазистационарном случае

$$n(t,\vec{r}) = e^{\lambda t} n(\vec{r}) \quad (35)$$

принимает следующий вид:

$$D\,\nabla^2 n(\vec{r}) + \left(h - 1 - \frac{\lambda}{\alpha\, V}\right)\alpha\, V\, n(\vec{r}) = 0 \quad (36)$$

и

$$\nabla^2 n(\vec{r}) + \frac{(h-1-\Lambda)\alpha V}{D} n(\vec{r}) = 0\,, \quad (37)$$

где

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha\, V}\,. \quad (38)$$

2.1. Исходные соотношения

В случае размножающих нейтроны квазистационарных систем из делящихся материалов ($h > 1$) имеют место следующие формулы (они при $\lambda = \Lambda = 0$ переходят в соотношения подраздела 1.1):

$$D = \frac{(h-1-\Lambda)V}{\alpha(1+\Lambda)^2 k^2}\,; \quad (39)$$

$$k = H\ A\mathrm{rctg}(k) \quad (40)$$

или

$$H\varphi = \mathrm{tg}(\varphi)\,;\ \varphi = \mathrm{Arctg}(k)\,. \quad (41)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$H = \frac{h}{1+\Lambda}\,. \quad (42)$$

Уравнение диффузии при $h > 1$ можно записать так:

$$\nabla^2 n(\vec{r}) + \left[(1+\Lambda)\alpha k\right]^2 n(\vec{r}) = 0\,. \quad (43)$$

В случае поглотителя нейтронов ($h < 1$)

$$D = \frac{(1-h+\Lambda)V}{\alpha(1+\Lambda)^2 k^2}\,. \quad (44)$$

Параметр k при $h < 1$ определяется из трансцендентного уравнения

$$H\ \mathrm{Arcth}(k) = k\,, \quad (45)$$

что эквивалентно уравнению

$$H\varphi = \mathrm{th}(\varphi)\,,\ \varphi = \mathrm{Arcth}(k)\,. \quad (46)$$

Если $h < 1$, то квазистационарное уравнение можно записать следующим образом:

$$\nabla^2 n(\vec{r}) - \left[(1+\Lambda)\alpha k\right]^2 n(\vec{r}) = 0\,. \quad (47)$$

2.2. Приближенные аналитические формулы

В разделе 1 были определены аналитические решения трансцендентных уравнений (5) и (8) при значении $H = h$. Поэтому искомые здесь формулы получаются из соотношений раздела 1 путем простой замены $h \to H$ в последних. Остается лишь выписать соответствующие итоговые формулы.

2.2.1. Нулевое приближение

$$\varphi_0 = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{3}{5}|H-1|(4H+1)}\,; \quad (48)$$

$$k_0 = H\varphi_0\,. \quad (49)$$

При любых значениях активности h коэффициент диффузии вычисляется по формуле

$$D_0 = \frac{5V}{3(4h+1+\Lambda)\alpha} \quad (50)$$

и справедливо уравнение диффузии

$$\nabla^2 n(\vec{r}) + \frac{3}{5}(h-1-\Lambda)(4h+1+\Lambda)\alpha^2 n(\vec{r}) = 0\,. \quad (51)$$

Уравнение диффузии для случаев $h > 1$ и $h < 1$ соответственно можно записать следующим образом:

$$\nabla^2 n(\vec{r}) + \left[(1+\Lambda)\alpha k_0\right]^2 n(\vec{r}) = 0\,,\ h > 1; \quad (52)$$

$$\nabla^2 n(\vec{r}) - \left[(1+\Lambda)\alpha k_0\right]^2 n(\vec{r}) = 0\,,\ h < 1. \quad (53)$$

Для коэффициента диффузии справедливы следующие частные формулы:

$$D_0(h=1,\ \Lambda=0) = \frac{V}{3\alpha}\,; \quad (54)$$

$$D_0(h,\ \Lambda=\Lambda_\infty) = \frac{V}{3h\alpha} = \frac{V}{3\beta}\,; \quad (55)$$

$\Lambda_\infty = \dfrac{\lambda_\infty}{\alpha V}$; $\lambda_\infty = (h-1)V\alpha$ – значения λ в бесконечной среде.

2.2.2. Первое приближение

Произведя замену $h \to H$ в формулах (27)–(33), получим

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{H\varphi_0 - \mathrm{tg}(\varphi_0)}{1 - H + (H\varphi_0)^2}\,,\ h > 1; \quad (56)$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{H\varphi_0 - \mathrm{th}(\varphi_0)}{1 - H - (H\varphi_0)^2}\,,\ h < 1; \quad (57)$$

$$k_1 = H\varphi_1\,; \quad (58)$$

$$D_1 = D_0 - \Delta D\,,\ \Delta D = D_0\frac{2\Delta\varphi}{\varphi_0}\,; \quad (59)$$

$$\Delta\varphi = \frac{H\varphi_0 - \mathrm{tg}(\varphi_0)}{1 - H + (H\varphi_0)^2}\,,\ h > 1; \quad (60)$$

$$\Delta\varphi = \frac{H\varphi_0 - \mathrm{th}(\varphi_0)}{1 - H - (H\varphi_0)^2}\,,\ h < 1. \quad (61)$$

Следует заметить, что при $h > 1$ и $h < 1$ соответственно $H > 1$ и $H < 1$. Это связано с выполнением для всех реальных систем неравенства $\left|\Lambda\right| \le \left|\Lambda_\infty\right| = \left|h-1\right|$. Поэтому в формулах, справедливых для квазистационарных систем, также разделяются только среды, размножающие и поглощающие нейтроны.

2.2.3. Характер зависимости коэффициента диффузии от активности среды и от $\Lambda = \dfrac{\lambda}{\alpha V}$

На рис. 1–3 представлены зависимости относительных коэффициентов диффузии нейтронов

$$d = \frac{D}{D\left(h=1, \Lambda=0\right)}, \quad d_0 = \frac{D_0}{D_0\left(h=1, \Lambda=0\right)},$$

$$d_1 = \frac{D_1}{D_1\left(h=1, \Lambda=0\right)}$$

от $\xi = \dfrac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$ при различных значениях активности h.

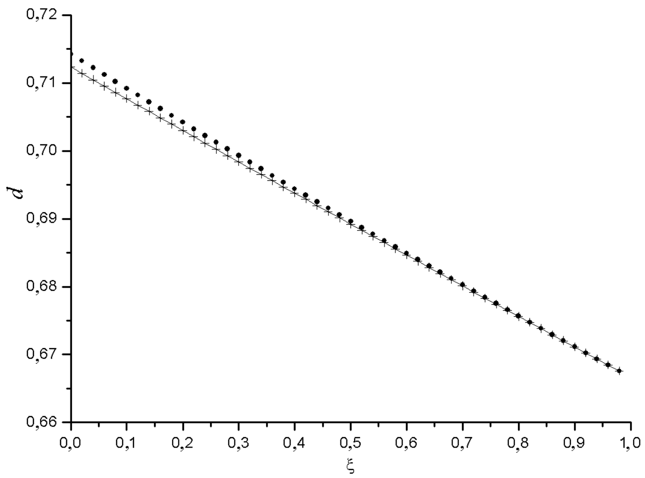

Рис. 1. Зависимость d (ξ) – сплошная кривая, d_0 (ξ) – кружочки, d_1 (ξ) – крестики при h = 1,5

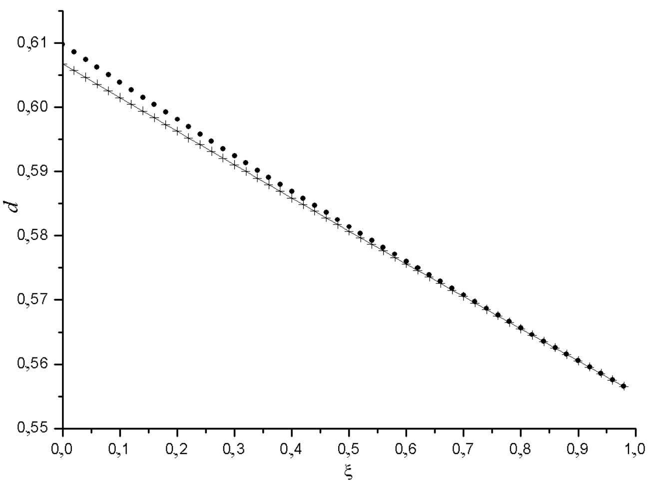

Рис. 2. Зависимость d (ξ) – сплошная кривая, d_0 (ξ) – кружочки, d_1 (ξ) – крестики при h = 1,8

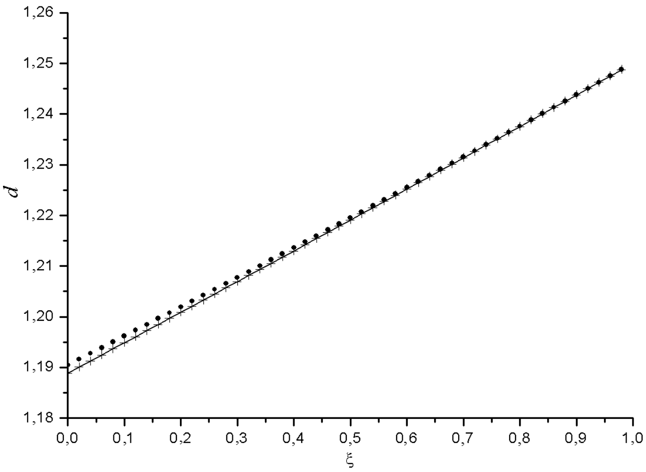

Рис. 3. Зависимость d (ξ) – сплошная кривая, d_0 (ξ) – кружочки, d_1 (ξ) – крестики при h = 0,8

Из рис. 1–3 видно, что уже нулевое приближение имеет высокую точность, а различие между коэффициентами диффузии d и d_1 отсутствует.

Список литературы

1. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

3. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Изд-во "Мир", 1972.

Статья поступила в редакцию 21.10.2008.