

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОГО И БЛИЗКОГО К ВЫРОЖДЕННОМУ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, В. П. Незнамов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Исследованы общие свойства решений вырожденного кинетического уравнения на собственные функции и собственные значения. В случае однородного шара из произвольного вещества, находящегося в вырожденном или в близком к вырожденному состояниях, получены приближенные аналитические решения задачи.

Введение

Будем исходить из односкоростного кинетического уравнения для нейтронов с постоянными параметрами Пайерлса α и β , записанного в следующем виде (см., например, [1]):

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(t, \vec{r}). \quad (1)$$

Здесь $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов \vec{r} и $\vec{\Omega}$ в момент времени t ; $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора \vec{V} скорости полета нейтрона; $\alpha = n_a(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ – обратный пробег нейтрона; $\beta = h\alpha$, $h = \frac{\nu\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность вещества; σ_s , σ_f , σ_c – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и захвата; ν – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра. $n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}')$ – нейтронная плотность в точке с радиус-вектором \vec{r} в момент времени t , произведение nV называется скалярным потоком.

Дополнительно к тем упрощающим предположениям (см. [1]), при которых справедливо уравнение (1), параметры α и β будем считать постоянными и приемем также следующий экспоненциальный закон эволюции во времени собственных функций (СФ):

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}); \quad n(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} n(\vec{r});$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} \vec{j}(\vec{r}), \quad (2)$$

$\vec{j} = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – векторный поток нейтронов (векторный ток).

В результате подстановки соотношений (2) в уравнение (1) получаем следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(\vec{r}), \quad (3)$$

где λ – собственное значение (СЗ) кинетического уравнения (3).

Нейтронная плотность подчиняется интегральному уравнению Пайерлса [2]

$$n(\vec{r}) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' n(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \exp \left[- \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) |\vec{r}' - \vec{r}| \right]. \quad (4)$$

Далее будем рассматривать пространственно-однородные системы, для которых

$$\lambda = -\alpha V. \quad (5)$$

Тогда вместо соотношений (3), (4) имеем следующие более простые вырожденные уравнения:

$$\left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(\vec{r}); \quad (6)$$

$$n(\vec{r}) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' n(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2}. \quad (7)$$

В первом разделе исследуются свойства решений вырожденных уравнений для произвольных по геометрии систем. В разделах 2, 3, 4 получены приближенные аналитические решения на СФ и СЗ для шара, находящегося в вырожденном ($\lambda = -\alpha V$) и близком к вырожденному состояниях ($\lambda \approx -\alpha V$).

1. Общие свойства решений вырожденных уравнений на СФ и СЗ в случае произвольных по геометрии однородных односвязных систем

Будем считать, что вещество, из которого состоит система, произвольно.

Сделаем замену переменной в уравнениях переноса нейтронов (6), (7)

$$\bar{z} = \beta \bar{r} = h \alpha \bar{r}. \quad (8)$$

В результате этого получим

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{n(\bar{z})}{4\pi}; \quad (9)$$

$$n(\bar{z}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\bar{z}' n(\bar{z}')}{|\bar{z}' - \bar{z}|^2}, \quad (10)$$

где $\psi(\bar{z}, \bar{\Omega})$ – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов \bar{z} и $\bar{\Omega}$.

Поскольку уравнения (9) и (10) не содержат в себе параметров h и α , то можно утверждать, что СФ в \bar{z} -пространстве не зависят от ядерно-физических свойств веществ, из которых состоят системы. Подчеркнем, что данное утверждение относится только к пространственным частям ($\psi(\bar{z}, \bar{\Omega})$ и $n(\bar{z})$) функций типа (2). Очевидно, что функции $\psi(t, \bar{z}, \bar{\Omega})$ и $n(t, \bar{z})$ зависят от характеристик среды за счет множителя $e^{\lambda t}$.

Граничное условие к кинетическому уравнению (отсутствие потока нейтронов из пустоты в систему) сужает рассматриваемые здесь произвольные системы до класса односвязных объектов с невыгнутыми внешними поверхностями. К этому же выводу приводит и уравнение Пайерлса (10). Действительно, в его правой части интегрирование ведется по объему системы и в случае вогнутых поверхностей возникает обмен нейтронами между некоторыми ее частями через пустые локальные зоны, а в них уравнение (10) не справедливо.

Попробуем установить зависимость СЗ от различных параметров. Для этого воспользуемся точной формулой подобия работы [3], которая связывает между собой СЗ λ_2 и λ_1 любых двух конечных однородных систем с произвольным, но фиксированным типом геометрии (например, шар, куб и т. д.)

$$\lambda_2 = \alpha_2 V \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right]. \quad (11)$$

Эта формула требует выполнения следующего условия подобия

$$h_2 \alpha_2 R_2 = h_1 \alpha_1 R_1, \quad (12)$$

R_1 и R_2 – характерные размеры систем «1» и «2».

Если некоторая система «1» находится в вырожденном состоянии с $\lambda_1 = -\alpha_1 V$, то из соотношения (11) вытекает, что любая другая, подобная первой по геометрии, система «2» тоже вырождена и $\lambda_2 = -\alpha_2 V$. При этом должно выполняться условие подобия (12), из которого получается следующая формула для вырожденных систем:

$$\alpha = \frac{c_0}{hR}. \quad (13)$$

Определяемая типом геометрии системы константа c_0 не зависит от ядерно-физических свойств вещества.

В результате подстановки (13) в (5) получим

$$\lambda = -\frac{c_0 V}{hR}. \quad (14)$$

Итак, для находящихся в вырожденных состояниях подобных по геометрии систем справедливы три формулы ((5), (13), (14)).

Сделаем ряд замечаний.

После перехода из обычного \bar{r} -пространства в безразмерное пространство $\bar{x} = \frac{\bar{r}}{R}$, где R – характерный размер объекта, вместо кинетического уравнения (3) имеем

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) \psi(\bar{x}, \bar{\Omega}) + \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R \cdot \psi(\bar{x}, \bar{\Omega}) = \frac{\beta R}{4\pi} n(\bar{x}). \quad (15)$$

Для подобных систем структуры $\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R$ и произведения βR одинаковы. Из этого вытекают формулы (11), (12) и следует, что подобные системы характеризуются одинаковыми * СФ $\psi(\bar{x}, \bar{\Omega})$, $n(\bar{x})$. Они, как и СФ $\psi(\bar{z}, \bar{\Omega})$, $n(\bar{z})$ (см. выше), не зависят от ядерно-физических свойств среды. Координаты точек в рассматриваемых пространствах связаны между собой следующим образом:

$$\bar{z} = \beta \bar{r} = \beta R \bar{x}. \quad (16)$$

С вырожденными стационарными уравнениями связана решенная в работе [4] Пайерлсом на примере активного шара чисто математическая задача об отыскании критических размеров систем с бесконечной мультипликацией (активностью). Пусть $h \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$ при условии конечности параметра β . Тогда для характерного критического размера из формулы (13), (14) получаем

$$R_* = \frac{c_0}{h\alpha} = \frac{c_0}{\beta}. \quad (17)$$

Формула Пайерлса (17) для критического радиуса R_* простейшей сферически-симметричной системы (критический однородный шар с бесконечной нейтронной мультипликацией $h = \infty$) приведена также в работе [2]. В приближенном решении (17) для шара

$$c_0 \approx \frac{2}{1,57} = 1,273885... \quad (18)$$

* В пространстве $\bar{r} = \bar{x} R$ функции $\psi(\bar{r}, \bar{\Omega})$, $n(\bar{r})$ для разных подобных систем отличаются друг от друга, так как соответствующие характерные размеры R_2 и R_1 при $\beta_2 \neq \beta_1$ тоже разные (см. формулу (12)).

2. Исходные уравнения и алгоритм поиска их приближенных решений в случае шара, находящегося в вырожденном или близком к вырожденному состояниях

Рассмотрим однородный шар с радиусом R , находящийся в состоянии, которому соответствует СЗ λ .

Внутри шара справедливо следующее кинетическое уравнение:

$$\mu \frac{\partial \psi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial \psi(r, \mu)}{\partial \mu} + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) \psi(r, \mu) = \frac{\beta}{2} n(r); \quad (19)$$

$$n(r) = \int_{-1}^{+1} d\mu \psi(r, \mu) \quad (20)$$

и соблюдается граничное условие $\psi(r=R, \mu < 0) = 0$.

Кинетическому уравнению (19) соответствует интегральное уравнение Пайерлса (4).

После интегрирования по углам возникают интегральные показательные функции типа

$$Ei(-y) = - \int_{y>0}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t}. \quad (21)$$

Разложение этих функций в ряд приводит к уравнению Пайерлса следующего вида:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f(z) K(z, x, \gamma); \quad (22)$$

$$x = \frac{r}{R} \leq 1; \quad (23)$$

$$f(x) = x n(x); \quad (24)$$

$$K(z, x, \gamma) = K_0(z, x) + \Delta K(z, x, \gamma); \quad (25)$$

$$K_0(z, x) = \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right|; \quad (26)$$

$$\Delta K(z, x, \gamma) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m \cdot m!} \left\{ [\gamma(z+x)]^m - [\gamma|z-x|]^m \right\}; \quad (27)$$

$$\gamma = \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) R. \quad (28)$$

Далее при поиске приближенных аналитических решений уравнения (22) используется метод последовательных приближений.

Допустим, что некоторое нулевое приближение $f^{[0]}(x)$ нам известно. Решение в i -м приближении определяется так

$$f^{[i]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f^{[i-1]}(z) K(z, x, \gamma), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Нейтронная плотность $n^{[i]}(x)$ определяется из соотношения (24).

Если исходить из кинетического уравнения (19), то метод последовательных приближений сводится к следующему:

$$\mu \frac{\partial \psi^{[i]}(r, \mu)}{\partial r} + \frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial \psi^{[i]}(r, \mu)}{\partial \mu} + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) \psi^{[i]}(r, \mu) = \frac{\beta}{2} n^{[i-1]}(r), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

Сначала, задавшись некоторой функцией $n^{[0]}(r)$, определяем из формулы (30) $\psi^{[1]}(r, \mu)$. Потом находим

$$n^{[1]}(r) = \int_{-1}^{+1} d\mu \psi^{[1]}(r, \mu) \quad \text{и результат подставляем в (30).}$$

Найдя $\psi^{[2]}(r, \mu)$, итерационный процесс можно продолжить.

В разделе 3 рассмотрен случай $\gamma = \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) R = 0$, а в разделе 4 предполагается, что $|\gamma| \ll 1$.

3. Нейтронная кинетика вырожденного шара

В этом разделе рассмотрен случай полного вырождения ($\gamma = 0$).

3.1. Плотность нейтронов

При $\gamma = 0$ в качестве ядра исходного интегрального уравнения надо взять $K(z, x) = K_0(z, x) = \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right|$.

В работе [2] проделана следующая аналитическая оценка: если $\tilde{f}(x) = x(1 - B_1 x^2)$, где $B_1 = 0,634$, то выполняется приближенное равенство

$$\int_0^1 dz \tilde{f}(z) \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right| = (1,57 \pm 0,02) \tilde{f}(x). \quad (31)$$

Исходя из этого, в качестве $f^{[0]}(x)$ можно было бы взять функцию $\tilde{f}(x)$. Однако нами показано, что несколько более точным является следующее нулевое приближение:

$$f^{[0]}(x) = x(1 - Bx^2); \quad (32)$$

$$B = 0,63; \quad (33)$$

$$n^{[0]}(r) = 1 - B \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad r \leq R. \quad (34)$$

В результате подстановки (32) в правую часть (29) и взятия возникших при этом интегралов получаем следующее решение (оно отнормировано на единицу в центре шара)

$$n^{[1]}(x) = \frac{1}{1,58} \left[y(x) - \frac{B}{6} (3x^2 + 1) \right]; \quad (35)$$

$$y(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{2x} \left[1 - \frac{B}{2}(1 + x^2) \right] \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|. \quad (36)$$

В этом разделе мы ограничились решением задачи в первом приближении.

Видно, что решение (35) не зависит от ядерно-физических свойств вещества и это находится в согласии со сделанными в разделе 1 общими выводами.

На границе шара ($x=1$) логарифмическая производная от нейтронной плотности характеризуется логарифмической расходимостью, поскольку из формулы

$$(35) \text{ следует, что } \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)_{r \rightarrow R} \sim \frac{1-B}{Rn(R)} \ln \left| \frac{R-r}{2R} \right|.$$

Расходятся и все высшие производные $\left[\frac{d^m}{dr^m} \times \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right) \right]_{r \rightarrow R}$, так как они пропорциональны отношению $\frac{(-1)^m (m-1)!}{|R-r|^m}$, $m \geq 2$.

В случаях $r \ll R$ и $r = R$ из (35) имеем

$$n(r) = n(r) \approx \frac{2}{1,58} \left[1 - \frac{B}{3} - \frac{1+B}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad n(0) = 1, \quad (37)$$

$$n(R) = \frac{1}{1,58} \left(1 - \frac{2B}{3} \right) \approx 0,3671. \quad (38)$$

В численном расчете по одной из математических программ вместо этого получено значение 0,3680. Таким образом, погрешность приближенного аналитического результата (38) составляет $\approx 0,25\%$.

3.2. Функция распределения нейтронов

В первом приближении для функции распределения $\psi(r, \mu)$ справедливо следующее решение:

$$\psi^{[1]}(x, \mu) = \frac{\beta R}{2} H(\xi_0, x), \quad x = \frac{r}{R} \leq 1; \quad (39)$$

$$H(\xi, x) = \xi \left[1 - Bx^2 + B\xi \left(\mu x - \frac{\xi}{3} \right) \right]; \quad (40)$$

$$\xi_0 = \xi_0(x, \mu) = \mu x + \sqrt{1 - x^2(1 - \mu^2)}. \quad (41)$$

В приложении показано, что СФ (39) удовлетворяет уравнению переноса нейтронов (30) при значении $i=1$.

Сравнение теоретической зависимости $\psi^{[1]}(x, \mu)$ с расчетной (использовалась математическая методика [5]) указывает на хорошее согласие приближенного решения (39) с результатами численного расчета.

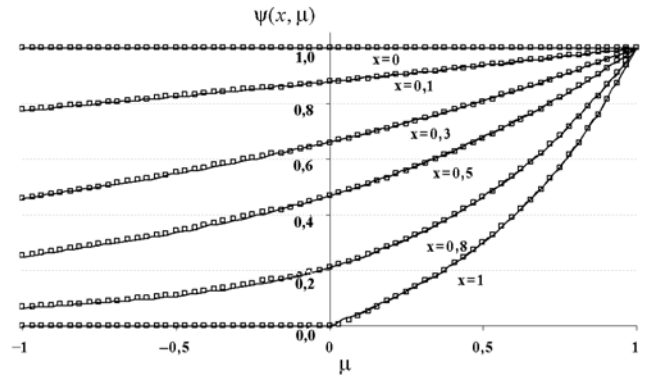


Рис. 1. Результаты вычислений функций распределения $\psi^{[1]}(x, \mu)$ по формуле (39) (сплошные кривые) и расчетов по методике [5] (квадраты)

Функции рис. 1 нормированы на единицу в точке $\mu = +1$.

3.3. Векторные потоки нейтронов и числа пересечений сферических поверхностей

Полный векторный поток в точке наблюдения $x = \frac{r}{R} \leq 1$ равен

$$j(x) = j_+(x) + j_-(x). \quad (42)$$

Здесь $j_+(x)$ и $j_-(x)$ – односторонние векторные потоки нейтронов, направленные соответственно вдоль и против радиуса r .

$$j_+(x) = V \int_0^1 d\mu \mu \psi(x, \mu), \quad j_-(x) = V \int_{-1}^0 d\mu \mu \psi(x, \mu). \quad (43)$$

Решения первого приближения имеют следующий вид:

$$j_{\pm}^{[1]}(x) = \pm \frac{\beta R V}{2} (X_{\pm} + Y_{\pm}); \quad (44)$$

$$j^{[1]} = j_+^{[1]} + j_-^{[1]}, \quad j_+^{[1]} > 0, \quad j_-^{[1]} = -|j_-^{[1]}| \leq 0; \quad (45)$$

$$X_{\pm} = \frac{1}{3} (1 - Bx^2) \left[\frac{1}{x^2} \{ 1 - Z_+ Z_- \sqrt{Z_+ Z_-} \} \pm x \right], \quad (46)$$

$$Z_{\pm} = 1 \pm x;$$

$$Y_{\pm} = \frac{B Z_{\pm}^2}{120 x^2} \left\{ Z_{\pm}^2 (Z_{\pm} - 5 Z_{\mp}) + 2 Z_{\mp}^2 [12 \sqrt{Z_+ Z_-} + 5 (Z_{\mp} - 3)] \right\}; \quad (47)$$

$$j_+^{[1]}(x=0) = |j_-^{[1]}(x=0)| = \frac{\beta R V}{4} \left(1 - \frac{B}{3} \right); \quad (48)$$

$$j_-^{[1]}(x=1) = 0, \quad j_+^{[1]}(x=1) = j^{[1]}(x=1) = \frac{\beta R V}{3} \left(1 - \frac{3}{5} B \right). \quad (49)$$

Интересным представляется следующее отношение:

$$g = \frac{j_+^{[1]}(x=1)}{j_+^{[1]}(x=0)} = \frac{4}{5} \frac{5-3B}{3-B}. \quad (50)$$

Числа перелетов частиц через сферические поверхности с радиусами $x = \frac{r}{R} \leq 1$ равны

$$J_{\pm}^{[1]}(x) = 4\pi x^2 \left| j_{\pm}^{[1]}(x) \right|, \quad J^{[1]}(x) = J_+^{[1]}(x) + J_-^{[1]}(x). \quad (51)$$

Полученные приближенные формулы хорошо согласуются с результатами численного решения кинетического уравнения. Это видно из рис. 2, 3.

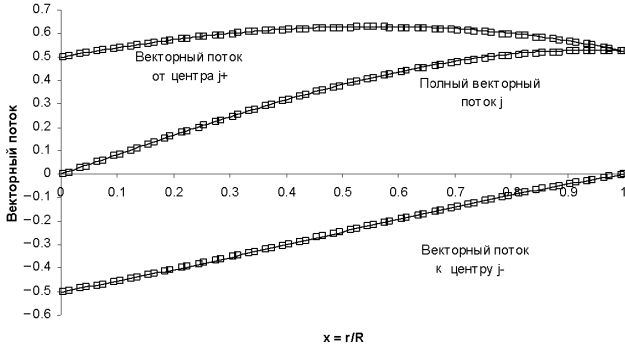


Рис. 2. Зависимости полного и односторонних векторных потоков от относительного радиуса $x = \frac{r}{R} \leq 1$ (сплошные линии и квадраты – соответственно результаты вычислений по формулам и численных расчетов по методике [5])

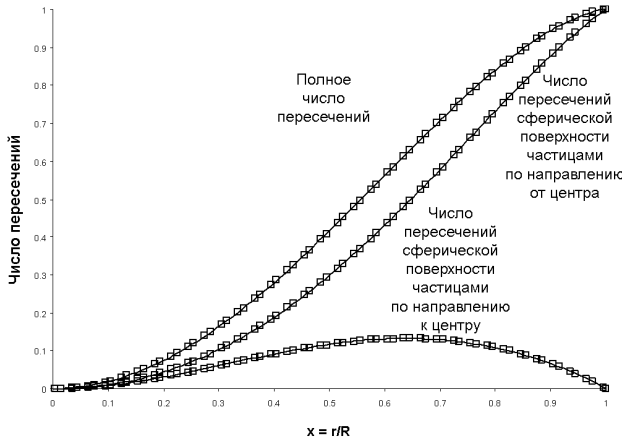


Рис. 3. Зависимость чисел пересечений (перелетов) от относительного радиуса $x = \frac{r}{R} \leq 1$ (сплошные линии и квадраты – соответственно результаты вычислений по формулам и численных расчетов по методике [5])

3.4. Собственные значения

Параметр λ определяется из уравнения баланса нейтронов в системе

$$\lambda \equiv \lambda^{[1]} = (h-1)\alpha V - W^{[1]}; \quad (52)$$

$$W^{[1]} = \frac{J^{[1]}(R)}{N^{[1]}(R)}. \quad (53)$$

Формулы (52), (53) фактически определяют связь между R и α для вырожденного шара.

Величины $J^{[1]}(R)$ (полное число вылетающих из шара в единицу времени нейтронов) и $N^{[1]}(R)$ (число нейтронов внутри шара) легко определяются

$$J^{[1]}(R) = 4\pi R^2 \left(\frac{\beta R V}{3} \right) \left(1 - \frac{3}{5} B \right), \quad B = 0,63; \quad (54)$$

$$N^{[1]}(R) = 2\pi R^3 \left(\frac{\beta R}{2} \right) \left(1 - \frac{5}{9} B \right). \quad (55)$$

Учитывая, что $\lambda = -\alpha V$, получаем искомый ответ

$$\lambda = -\frac{c_0}{h} \left(\frac{V}{R} \right); \quad (56)$$

$$c_0 = \frac{12(5-3B)}{5(9-5B)} \approx 1,2759. \quad (57)$$

Приведем также формулу для параметра $K_{эф}$ активного ($h > 1$) шара, находящегося в подкритическом вырожденном состоянии

$$K_{эф} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha_s} h - 1}{\frac{\alpha}{\alpha_s} (h+1) - 1}, \quad \alpha = n_{я}(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c) = \frac{c_0}{h R},$$

$$\alpha_s = n_{я} \sigma_s. \quad (58)$$

Решим теперь задачу о критическом радиусе шара с бесконечной активностью h (величины, относящиеся к критическому состоянию, будем отмечать звездочками)

$$J_* = J(\lambda = 0, R = R_*) = \frac{4\pi}{15} (5-3B)(\beta_* R_* V) R_*^2; \quad (59)$$

$$N_* = \frac{\pi}{9} (9-5B)(\beta_* R_*) R_*^3; \quad (60)$$

$$R_* = \frac{c_0}{\beta_*}. \quad (61)$$

Пайерлс (см. [2, 4]) тоже получил формулу (61), но со значением постоянной $c_0 = 1,273885$. Решение Пайерлса было получено в опоре на приближенное соотношение (31). Поэтому решение Пайерлса не претендует на точность в c_0 и R_* выше, чем $\frac{0,02}{1,57} \cdot 100 \approx 1,3\%$.

В то же время по случайности уточнение (57) оказалось незначительным $\frac{1,2759}{1,273885} = 1,0016$.

В. Г. Заграфов в работе [6], отвлекшись от вопроса о применимости диффузионной теории, разложил вытекающее из нее условие критичности шара по параметру $\frac{1}{h} \ll 1$ и таким образом тоже определил предель-

ное (при $h \rightarrow \infty$) значение R_* . Оно с точностью порядка процента совпало с решением Пайерлса [4]. Поэтому в статье [6] утверждается, что несмотря на применимость диффузионного приближения в противоположном случае ($h-1 \ll 1$), диффузионное критическое условие для шара справедливо при любых h , в том числе и $h = \infty$. Это обстоятельство В. Г. Заграфов назвал парадоксальным фактом. Утверждение В. Г. Заграфова не вызывает сомнений. Однако теория диффузии нейтронов включает в себя не только критическое условие. Его выполнение не является доказательством применимости диффузионной теории. Из проведенного нами сравнения следует, что найденные выше зависимости $n^{[1]}(x)$ и $j_{\pm}^{[1]}(x)$ значительно отличаются от соответствующих диффузионных функций $n_D(x)$ и $j_{D\pm}(x)$. Таким образом, в случае вырожденного шара диффузионное приближение не справедливо.

Феномен В. Г. Заграфова объясняется тем, что в отношении $W_D(R) = \frac{J_D(R)}{N_D(R)}$, которое входит в уравнение баланса нейтронов, погрешности диффузионных величин $J_D(R)$ и $N_D(R)$ скомпенсировались случайным образом настолько, что для критического радиуса R_{*D} получилась весьма точная диффузионная формула.

4. Приближенные решения интегрального уравнения с сильно вырожденным ядром

В разделе 3 был рассмотрен случай полного вырождения, когда $\gamma = \left(\alpha + \frac{\lambda}{V}\right)R = 0$. Здесь ищутся решения в квадратичном приближении по малому параметру γ .

Пусть $\lambda_0 = -\alpha_0 V$. Отойдя от вырожденного состояния на величину $\Delta\alpha$ такую, что $\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}\right| \ll 1$, определим СФ и СЗ.

4.1. Приближенные решения на СФ

Оставив в сумме (27) первое и второе слагаемые, приходим к интегральному уравнению относительно функции $f(x) = xn(x)$

$$\frac{2}{\beta R} f(x) = \hat{U}f. \quad (62)$$

Оператор $\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2$ определен следующим образом:

$$\hat{U}_0 f = \int_0^1 dz f(z) \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right|; \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 f &= -\gamma \int_0^1 dz f(z) (z+x-|z-x|) = \\ &= -2\gamma \left[\int_0^x dz z f(z) + x \int_0^x dz f(z) \right]; \quad (64) \end{aligned}$$

$$\hat{U}_2 f = x\gamma^2 \int_0^1 dz z f(z). \quad (65)$$

Функция $f^{[0]}(x) = x(1-Bx^2)$ (см. формулу (32)) была принята за исходное нулевое приближение. Далее задача решалась с помощью теории возмущений. Выкладки привели к следующим итоговым результатам:

$$n(x) = n_0(x) + \gamma n_1(x) + \gamma^2 n_2(x); \quad (66)$$

$$\begin{aligned} n_0(x) &= \frac{\beta R}{2} \left[0,8950 - 0,3150x^2 + \right. \\ &\left. + (0,6850 - 0,3150x^2) \varphi_0(x) \right], \quad (67) \end{aligned}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1-x^2}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad (68)$$

Формулы (67) и (35) совпадают друг с другом с точностью до нормировочных множителей

$$\begin{aligned} n_1(x) &= \frac{\beta R}{2} \left\{ a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \left[\frac{B}{2} - 1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{(5-B)(1+x^2) - Bx^4}{30} \right] \varphi_0(x) \right\}, \quad (69) \end{aligned}$$

$$n_2(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ \sum_{m=0}^3 b_m x^{2m} + \frac{5-3B}{30} [1 + \varphi_0(x)] \right\}. \quad (70)$$

Коэффициенты a_i и b_m выражаются формулами, в которые входит константа $B = 0,63$. Укажем численные значения коэффициентов: $a_0 = -1,0886$, $a_2 = 0,435$, $a_4 = -0,0764$, $b_0 = 0,6829$, $b_1 = -0,1454$, $b_2 = 0,0212$, $b_3 = -0,0019$.

Градиент СФ $\frac{dn(x)}{dx}$ на поверхности шара ($x=1$) расходится, поскольку он пропорционален следующему произведению: $\left(1 - 0,7138\gamma + 0,357\gamma^2\right) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right)$.

Сравнительные точные расчеты СФ по методике [5] показали, что формулами этого подраздела можно пользоваться при отходе от вырожденного состояния ($\lambda_0 = -\alpha_0 V$) на величину $\Delta\alpha = |\alpha - \alpha_0| \leq 0,1\alpha_0$.

4.2. Решения на собственные значения

4.2.1. СЗ в случае $\lambda \neq -\alpha V$

Для определения λ требуется знать число перелетов через поверхность шара в единицу времени $J(R)$ и количество нейтронов в системе $N(R)$. В связи с этим были получены приближенные формулы для расчета векторных потоков.

Опустив формулы для интегральных величин $J(R)$ и $N(R)$, приведем лишь формулу для скорости утечки нейтронов в пустоту

$$W = W^{[1]} \frac{1 - s_1 \gamma + s_2 \gamma^2}{1 - p_1 \gamma + p_2 \gamma^2}. \quad (71)$$

Здесь $s_1 = 1,3081$, $s_2 = 1,0260$, $p_1 = 1,0382$, $p_2 = 0,6873$; $W^{[1]}$ – найденная выше величина: $W^{[1]} = W(\gamma = 0) = c_0 \left(\frac{V}{R} \right)$, $c_0 = 1,2759$.

После подстановки (71) в уравнение баланса нейтронов ($\lambda = (h-1)\alpha V - W$) получаем квадратное алгебраическое уравнение относительно γ . Его решением является

$$\gamma = \frac{-(1 - c_0 s_1 + p_1 \beta R) + \sqrt{(1 - c_0 s_1 + p_1 \beta R)^2 - 4(c_0 s_2 - p_1 - p_2 \beta R)(c_0 - \beta R)}}{2(c_0 s_2 - p_1 - p_2 \beta R)}. \quad (72)$$

Искомое СЗ равно

$$\lambda = \left(\frac{\gamma}{R} - \alpha \right) V. \quad (73)$$

Величину $K_{эф}$ можно рассчитать так:

$$K_{эф} = \frac{v \alpha_f}{\alpha_f + \alpha_c + \frac{W}{V}}, \quad K_{эф} = 1 + \lambda \tau_n. \quad (74)$$

Величина W определена соотношением (71), а время жизни нейтрона $\tau_n = \frac{1}{(\alpha_f + \alpha_c)V + W}$.

4.2.2. Критический радиус шара в случае $h \gg 1$

Определим теперь критический радиус шара с высокой нейтронной мультипликацией (активностью) $h \gg 1$. В этом случае уравнение баланса нейтронов приводит к следующему критическому условию:

$$\beta R_* \left(1 - \frac{1}{h} \right) \left[1 - p_1 \frac{\beta R_*}{h} + p_2 \left(\frac{\beta R_*}{h} \right)^2 \right] = c_0 \left[1 - s_1 \frac{\beta R_*}{h} + s_2 \left(\frac{\beta R_*}{h} \right)^2 \right]. \quad (75)$$

Это кубическое относительно R_* уравнение можно упростить путем его разложения в ряд Тейлора по степеням $\frac{1}{h}$ с последующим пренебрежением соответствующими малыми слагаемыми.

При $h \geq 10$ уравнение (75) приводит к определению R_* с точностью выше, чем 0,02%, но даже при $3 \leq h \leq 5$ погрешность в R_* , даваемая этим уравнением, невелика: 0,3 % ($h = 5$) и 1,6 % ($h = 3$).

4.2.3. Полуинтерполяционная формула для расчета λ в широком диапазоне изменения оптической толщины шара из делящегося вещества с $h \gg 1$

В линейном по $\gamma = \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) R$ приближении интегральное уравнение (62) имеет следующий вид:

$$\frac{2}{\beta R} f(x) = (\hat{U}_0 + \hat{U}_1) f(z). \quad (76)$$

Воспользовавшись приближенной формулой $\hat{U}_0 f(z) \approx 1,57 f(x)$, из соотношения (76) получим

$$\eta f(x) = \int_0^1 dz (z + x - |z - x|) f(z), \quad (77)$$

$$\eta = \frac{1,57 - \frac{2}{h(\alpha R)}}{\alpha R + \frac{\lambda}{V} R}, \quad \alpha R - \text{оптическая толщина.} \quad (78)$$

Зависимости η и λ от αR и h определялись с помощью численного решения соответствующего уравнения переноса нейтронов. Оказалось, что имеется единая для $h \in [1, 3; 1, 7]$ зависимость $\gamma(\beta R)$ и она в интервале $1,5 \leq \beta R \leq 4$ хорошо аппроксимируется следующей функцией:

$$\eta = \frac{1}{(\beta R)^{0,83}}. \quad (79)$$

Подстановка (79) в (78) привела к полуинтерполяционной формуле

$$\lambda = \frac{V}{R} (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right]. \quad (80)$$

Эта формула уникальна с точки зрения широты диапазона своей применимости. Начиная работать от $\alpha \geq \alpha_{\min} \rightarrow 0$ и плотности $\rho \rightarrow 0$ при условии постоянства массы шара M , она неплохо передает зависимость $\lambda = \lambda(\rho)$ в интервале $\lambda = -\alpha V \leq \lambda < \lambda(\rho = 0) = 0$ и имеет высокую точность в диапазоне $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \approx \lambda(\rho \approx 1,5\rho^*)$, ρ^* – плотность критического шара. Формула (80) неприменима при $\rho \rightarrow \infty$ и в области очень больших оптических толщин, где справедлива теория диффузии нейтронов.

Отметим, что если в формуле (80) активность h устремить к бесконечности, то из нее получается результат Пайерлса (17), (18) для критического радиуса

$$\text{шара: } R_* = \frac{2}{1,57 \beta_*}.$$

Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
2. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.

3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–64.

4. Peierls R. Critical conditions in neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. Part 4. P. 610–615.

5. Мжачих С. В., Грошев Е. В., Юдинцев В. Ф. О некоторых свойствах $\tilde{D}S_n^Y$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса // ВАНТ. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2. С. 21–31.

6. Заграфов В. Г. Секторный метод расчета критических параметров тел произвольной формы из делящегося материала // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1993. Вып. 3. С. 11–14.

Приложение

Доказательство справедливости полученного решения кинетического уравнения на собственные функции

Убедимся, что функция распределения $\psi^{[1]} \left(x = \frac{r}{R}, \mu \right)$, найденная в 3.2, удовлетворяет следующему кинетическому уравнению:

$$\mu \frac{\partial \psi^{[1]}(x, \mu)}{\partial x} + \frac{1-\mu^2}{x} \frac{\partial \psi^{[1]}(x, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\beta R}{2} n^{[0]}(x); \quad (\text{П1})$$

$$n^{[0]}(x) = 1 - Bx^2, \quad B = 0,63; \quad (\text{П2})$$

$$\psi^{[1]} = \frac{\beta R}{2} H(\xi, x, \mu),$$

$$H(\xi, x, \mu) = \xi \left[1 - Bx^2 + B\xi \left(\mu x - \frac{\xi}{3} \right) \right]; \quad (\text{П3})$$

$$\xi = \mu x + \sqrt{1 - x^2(1 - \mu^2)}. \quad (\text{П4})$$

Вместо кинетического уравнения (П1) рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции $H[\xi(x, \mu), x, \mu]$

$$\mu \frac{\partial H(\xi, x, \mu)}{\partial x} + \frac{1-\mu^2}{x} \frac{\partial H(\xi, x, \mu)}{\partial \mu} = 1 - Bx^2. \quad (\text{П5})$$

Возьмем соответствующие производные:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -2Bx\xi + B\mu\xi^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad (\text{П6})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = Bx\xi^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mu}; \quad (\text{П7})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mu - \frac{x(1-\mu^2)}{\sqrt{1-x^2(1-\mu^2)}} = \mu - \frac{x(1-\mu^2)}{\xi - \mu x}; \quad (\text{П8})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mu} = x + \frac{\mu x^2}{\xi - \mu x}. \quad (\text{П9})$$

После подстановки соответствующих производных в левую часть уравнения (П5) имеем

$$\mu \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1-\mu^2}{x} \frac{\partial H}{\partial \mu} = B\xi(\xi - 2\mu x) + \frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (\text{П10})$$

Поскольку $\frac{\partial H}{\partial \xi} = 1 - Bx^2 + 2B\mu x\xi - B\xi^2$, то уравнение (П5) превратилось в тождество $1 - Bx^2 \equiv 1 - Bx^2$, что и требовалось доказать.

Статья поступила в редакцию 26.03.2009