УДК 539.17

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИЛНА В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

**Н. Б. Бабичев, П. В. Забусов**

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Определены приближенные аналитические решения задачи Милна. В отличие от известных точных, приближенные решения из-за своей простоты позволили установить характер зависимостей всевозможных физических величин от аргументов и параметров. Это дало наглядное представление о процессах нейтронной кинетики.

## Введение

Задача Милна состоит в нахождении распределения нейтронов внутри полубесконечной однородной среды. Точные решения различных вариантов стационарной задачи Милна приведены в [1, 2]. К ним относятся аналитические решения кинетического уравнения

$$\mu\frac{\partial\psi(x,\mu)}{\partial x}+\alpha\psi(x,\mu)=\frac{h\alpha}{2}n(x) \qquad (1)$$

или интегрального уравнения переноса нейтронов

$$n(x)=-\frac{h\alpha}{2}\int_0^\infty dx'n(x')Ei(-\alpha|x'-x|). \qquad (2)$$

Кинетическое уравнение (1) решается с граничным условием

$$\psi(x=0,\mu>0)=0, \qquad (3)$$

в котором, как и в соотношении (2), предполагается, что вещество находится в области положительных $x$, а при $x<0$ полупространство пустое. Выше использованы следующие обозначения: $\psi(x,\mu)$ – функция распределения нейтронов; $n(x)=\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu)d\mu$ – нейтронная плотность; $x$ – координата точки наблюдения; $\mu$ – косинус угла между вектором $\vec{V}$ скорости полета нейтрона и положительным направлением оси $OX$; $\alpha=n_я(\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c)$ – полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтронов с ядрами вещества (обратный пробег нейтрона); $n_я$ – плотность ядер; $h=$ $=\frac{\nu\sigma_f+\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c}$ – активность среды ($h>1$ и $h<1$ соответственно размножающая и поглощающая нейтроны среды, $h=1$ – инертное вещество); $\sigma_s,\sigma_f,\sigma_c$ – элементарные сечения рассеяния, деления и поглощения; $\nu$ – среднее число вторичных нейтронов, возникающих в одном акте деления активного ядра; $Ei(-x)=-\int_x^\infty dt\frac{e^{-t}}{t}$, $x>0$ – интегральная показательная функция.

Известно, что в случае $h>1$ классические решения (см. [1, 2]) стационарных уравнений (1), (2), являясь формальными математическими, противоречат физическому смыслу, поскольку приводят к возникновению в среде областей с отрицательной плотностью нейтронов. В случае размножающей среды ($h>1$) правильным является определенное в работе [3] физическое нестационарное решение задачи Милна

$$\begin{aligned}&\psi(t,x,\mu)=\psi(x,\mu)\exp(\lambda t);\\&n(t,x)=n(x)\exp(\lambda t),\ \lambda=(h-1)\alpha V,\end{aligned} \qquad (4)$$

где $V$ – величина скорости нейтронов. При $h<1$ решение (4), как и известное стационарное, тоже не противоречит физическому смыслу.

После подстановки соотношения (4) в соответствующие нестационарные интегродифференциальное и интегральное уравнения переноса частиц и замены переменной

$$z=h\alpha x \qquad (5)$$

получим

$$\mu\frac{\partial\psi(z,\mu)}{\partial z}+\psi(z,\mu)=\frac{1}{2}n(z), \qquad (6)$$

$$n(z)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty dz'n(z')Ei(-|z'-z|). \qquad (7)$$

Граничное условие при этом выглядит так

$$\psi(z=0,\mu>0)=0. \qquad (8)$$

Из соотношений (4)–(8) видно, что для различных веществ экспоненциальная зависимость от времени (4) в общем случае различна, а равновесные пространственно-угловое и пространственное распределения нейтронов $\psi(z,\mu)$, $n(z)$ одинаковы. Уравнения (6), (7) и граничное условие (8) в $z$ – пространстве не зависят от ядерно-физических свойств среды. Поэтому пространственная часть $n(z)$ нестационарной функции $n(t,z) = n(z)\exp(\lambda t)$ для произвольных $h \neq 1$ совпадает с точным решением [4] стационарной задачи Милна в инертной среде $(h=1)$. Из работы [4] следует постоянство полного векторного потока нейтронов $j = V\int_{-1}^{1} d\mu\,\mu\psi(z,\mu)$ внутри среды. В остальном, с точки зрения математики, работа [4] оказалась столь сложной, что на ее основе детально были изучены только угловое распределение нейтронов на границе $z=0$ [5] и зависимость $n(z)$ [6].

Главная цель статьи состоит в нахождении приближенных аналитических решений задачи Милна, которые из-за своей простоты позволяют детально представить себе нейтронно-кинетические процессы в системе, т.е. исследовать зависимости различных физических величин от $x$, $\mu, h$ и $\alpha$.

Интересно также с помощью приближенных формул изучить вопрос о распределении нейтронов в пустоте за пределами среды.

## 1. Алгоритм поиска приближенных аналитических решений

Уравнения вида (6), (7) будем решать методом последовательных приближений, представив их следующим образом:

$$\mu\frac{\partial\psi^{[1]}(z,\mu)}{\partial z} + \psi^{[1]}(z,\mu) = \frac{1}{2}n^{[0]}(z)\,; \tag{9}$$

$$n^{[1]}(z) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dz' n^{[0]}(z')Ei(-|z'-z|)\,; \tag{10}$$

$n^{[0]}(z)$ – некоторое нулевое приближение; $n^{[1]}(z)$, $\psi^{[1]}(z,\mu)$ – решения в первом приближении. Мы ограничимся определением решений в первом приближении. Чтобы получить искомые удобные для анализа формулы, в качестве простого нулевого приближения выберем функцию

$$n^{[0]}(z) = n_0(z) = z + z_0. \tag{11}$$

Здесь $z_0 = 0{,}7104$ – так называемая длина экстраполяции.

Функция (11) представляет собой асимптотическую часть $n_0(z)$ решения [3]

$$n(z) = n_0(z) + \Delta n(z)\,, \tag{12}$$

где $\Delta n(z)$ – сравнительно малая отрицательная поправка к асимптотической плотности (11), которая быстро исчезает при удалении от границы $z=0$ в сторону положительных $z$, так что $\lim\limits_{z\to\infty}\Delta n(z) = 0$.

## 2. Приближенные аналитические решения внутри среды

Из кинетического уравнения (6), сделав замену $\psi(z,\mu) = \chi(z,\mu)e^{-z/\mu}$, в результате интегрирования по пространственной координате можно получить следующее выражение для функции распределения нейтронов:

$$\psi(z,\mu) = \frac{1}{2\mu}\begin{cases} \int_0^{z} dz' n(z')\exp\left(\dfrac{z'-z}{\mu}\right), & \mu \geq 0; \\ -\int_z^{\infty} dz' n(z')\exp\left(\dfrac{z'-z}{\mu}\right), & \mu < 0. \end{cases} \tag{13}$$

После подстановки $n(z) = n_0(z) = z + z_0$ в правую часть (13) имеем

$$\psi^{[1]}(z,\mu) = \frac{1}{2}\begin{cases} z + z_0 - \mu + (\mu - z_0)\exp\left(-\dfrac{z}{\mu}\right), & \mu \geq 0; \\ z + z_0 - \mu, & \mu < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Легко убедиться, что функция (14) удовлетворяет кинетическому уравнению (9), записанному в первом приближении.

Если функцию $\psi^{[1]}(z=0,\mu)$ перенормировать так, чтобы выполнялось условие $\int_{-1}^{1} d\mu\psi^{[1]}(z=0,\mu) = 1$, то она будет представлять собой первое приближение для углового распределения нейтронов на границе полубесконечной среды с пустотой, точное выражение для которого было получено и затабулировано Плачеком в работе [5]. Сравнение этих функций показало, что наибольшее отличие приближенного решения от точного наблюдается при $\mu = 0$, и составляет 17 %. В целом же погрешность формулы (14) намного меньше.

Графически зависимость (14) представлена на рис. 1.

Из рис. 1 следует, что вдали от границы $z=0$ угловое распределение нейтронов изотропно. Вблизи границы $z=0$ наблюдается анизотропия.

Зная функцию распределения нейтронов, можно получить аналитические выражения для любых физических характеристик. Ниже найдены пространственные зависимости нейтронной плотности, векторных и скалярных потоков.

Выражение для нейтронной плотности, полученное из формулы (10) при $n^{[0]}(z') = z' + z_0$, имеет достаточно простой для анализа вид

$$n^{[1]}(z) = z + z_0 - \frac{1}{2}\Big\{(z+z_0)\left[zEi(-z) + e^{-z}\right] - \\ -\frac{1}{2}\left[z^2 Ei(-z) + (1+z)e^{-z}\right]\Big\}. \tag{15}$$

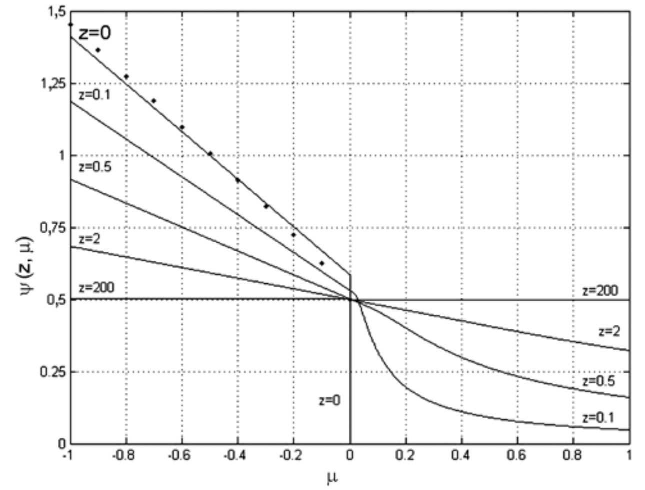


Рис. 1. Зависимости нормированной на единицу ($\int_{-1}^{1} d\mu\psi^{[1]}(z,\mu)=1$) функции $\psi^{[1]}(z,\mu)$ (сплошные линии) и функции $\varphi(-\mu)$ работы [5] (точки)

При $z>>1$ $n^{[1]}(z)\approx n(z)\approx z+z_0$. Наибольшее отличие $n^{[1]}(z)$ от точного решения Марка [6], возникает на границе $z=0$: $n(z=0)=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}5773$; $n^{[1]}(z=0)=$ $=\frac{1}{2}\left(z_0+\frac{1}{2}\right)=0{,}6052$; $\frac{n^{[1]}(z=0)}{n(z=0)}=1{,}0489.$

Графически пространственное распределение нейтронной плотности представлено на рис. 2.

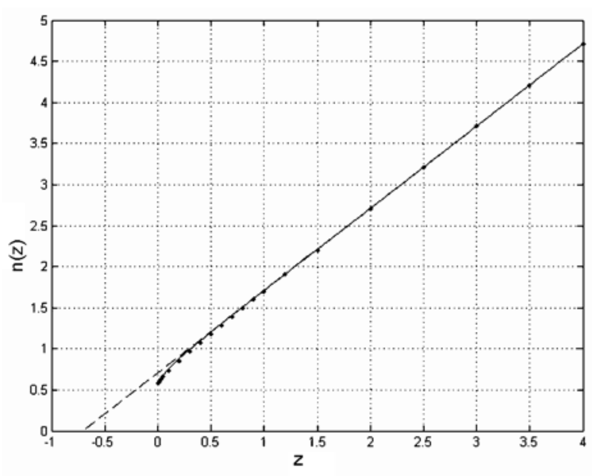


Рис. 2. Зависимости $n^{[1]}(z)$ (сплошная линия) и $n(z)$ работы [6] (точки), пунктир – асимптотическая функция $n^{[0]}(z)=n_0(z)=z+z_0$

В работе [7] показано, что для логарифмической производной от нейтронной плотности вблизи плоской границы $z=0$ полубесконечной среды с пустотой справедлива следующая точная формула:

$$\left(\frac{1}{n(x)}\frac{dn(x)}{dx}\right)_{x\to+0}=-\frac{\beta}{2}\ln|\beta x|, \qquad (16)$$

где $\beta=h\alpha$. Аналогичной логарифмической расходимостью обладает и приближенное решение

$$\left(\frac{1}{n^{[1]}(x)}\frac{dn^{[1]}(x)}{dx}\right)_{x\to+0}=-\frac{2z_0\beta}{2z_0+1}\ln|\beta x|=$$

$$=-\frac{\beta}{1{,}7038}\ln|\beta x|. \qquad (17)$$

Точная (16) и приближенная (17) формулы отличаются примерно на 15 % в множителе перед логарифмом.

Векторные потоки (односторонние и полный) вычисляются по формулам:

$$j_+^{[1]}(z)=V\int_0^1 d\mu\,\mu\,\psi^{[1]}(z,\mu),\ \ j_-^{[1]}(z)=$$

$$=V\int_{-1}^{0} d\mu\,\mu\,\psi^{[1]}(z,\mu); \qquad (18)$$

$$j^{[1]}(z)=j_+^{[1]}(z)+j_-^{[1]}(z). \qquad (19)$$

После подстановки (14) в (18) и (19) получим

$$j_+^{[1]}(z)=\frac{V}{4}\left\{z+z_0-z_0e^{-z}-\frac{2}{3}\left(1-e^{-z}+\frac{ze^{-z}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z^2}{3}+zz_0\right)\left[zEi(-z)+e^{-z}\right]\right\}; \qquad (20)$$

$$j_-^{[1]}(z)=-\frac{V}{4}\left(z+z_0+\frac{2}{3}\right); \qquad (21)$$

$$j^{[1]}(z)=\frac{V}{4}\left\{-z_0e^{-z}-\frac{2}{3}\left(2-e^{-z}+\frac{ze^{-z}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z^2}{3}+zz_0\right)\left[zEi(-z)+e^{-z}\right]\right\}. \qquad (22)$$

Обратимся к рис. 3. На нем представлены относительные полный и односторонние векторные потоки как функции $z$

$$J^{[1]}(z)=\frac{j^{[1]}(z)}{\left|j^{[1]}(z=0)\right|},\ J_+^{[1]}=$$

$$=\frac{j_+^{[1]}(z)}{\left|j^{[1]}(z=0)\right|},\ J_-^{[1]}=\frac{j_-^{[1]}(z)}{\left|j^{[1]}(z=0)\right|}. \qquad (23)$$

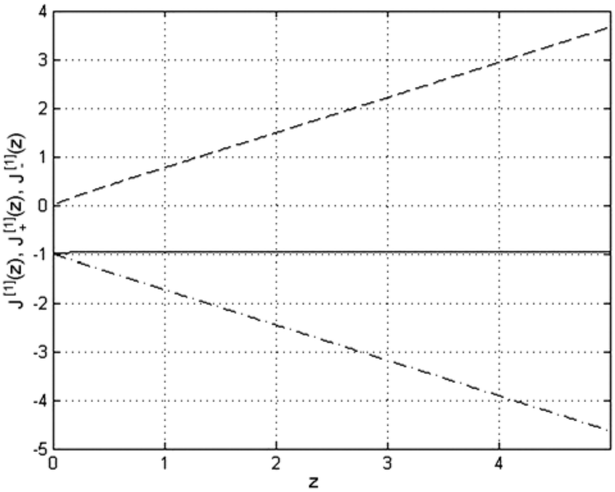


Рис. 3. Зависимости $J^{[1]}(z)$ (сплошная линия), $J_+^{[1]}(z)$ (пунктир), $J_-^{[1]}(z)$ (штрихпунктир)

Выражения для односторонних и полного скалярных потоков выглядят так

$$\omega_+(z) = V\int_0^1 d\mu\,\psi(z,\mu),\ \omega_-(z) = V\int_{-1}^0 d\mu\,\psi(z,\mu),$$

$$\omega(z) = \omega_+(z) + \omega_-(z); \tag{24}$$

$$\omega_+^{[1]}(z) = \frac{V}{2}\left\{z + z_0 - \frac{1}{2} - (z+z_0)\left[zEi(-z) + e^{-z}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[z^2 Ei(-z) + (1+z)e^{-z}\right]\right\}; \tag{25}$$

$$\omega_-^{[1]}(z) = \frac{V}{2}\left(z + z_0 + \frac{1}{2}\right),\quad \omega^{[1]}(z) = \omega_+^{[1]}(z) + \omega_-^{[1]}(z). \tag{26}$$

Графики относительных скалярных потоков приведены на рис. 4.

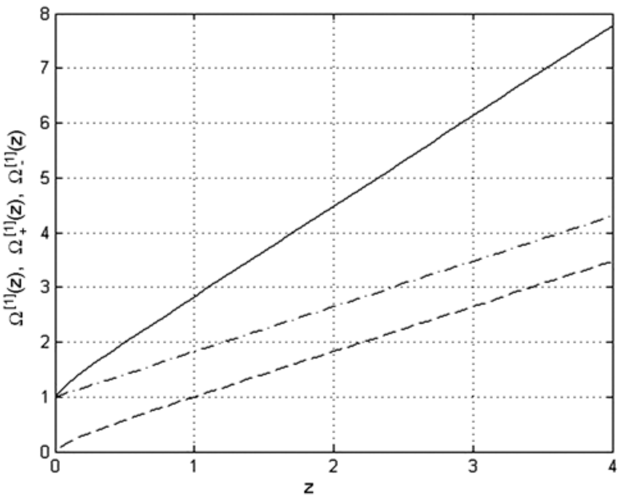


Рис. 4. Зависимости $\Omega^{[1]}(z)$ (сплошная линия), $\Omega_+^{[1]}(z)$ (пунктир), $\Omega_-^{[1]}(z)$ (штрихпунктир)

$$\Omega^{[1]}(z) = \frac{\omega^{[1]}(z)}{\omega^{[1]}(z=0)};\ \Omega_+^{[1]}(z) = \frac{\omega_+^{[1]}(z)}{\omega^{[1]}(z=0)};$$

$$\Omega_-^{[1]}(z) = \frac{\omega_-^{[1]}(z)}{\omega^{[1]}(z=0)}.$$

## 3. Приближенные аналитические решения в вакууме

Теперь обратимся к вопросу о пространственном распределении нейтронов в пустоте $(x<0,\ z<0)$. В вакууме характер поведения собственных функций для $h<1$, $h=1$ и $h>1$ различен, т. е. при $z<0$ функции $\psi(z,\mu)$ и $n(z)$ параметрически зависят от $h$.

Согласно работе [3], выражение для нейтронной плотности в пустоте $n_{ex}(z,h)$ имеет следующий вид:

$$n_{ex}(z,h) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dz' n(z')\int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu}\exp\left(\frac{z'}{\mu} + \frac{h-1}{h}\frac{|z|}{\mu}\right). \tag{27}$$

### 3.1. Случай $h \ge 1$

Пусть $h \ge 1$. Запишем соотношение для функции распределения нейтронов в пустоте.

$$\psi_{ex}(z,\mu,h\ge 1) = \begin{cases} 0,\ \mu \ge 0; \\ -\dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty dz' n(z')\exp\left(\frac{z'}{\mu} + \frac{h-1}{h}\frac{|z|}{\mu}\right),\ \mu<0. \end{cases} \tag{28}$$

Подставив $n(z') = n^{[0]}(z') = z' + z_0$ в формулу (28) и вычислив интеграл, получим

$$\psi_{ex}^{[1]}(z,\mu,h\ge 1) = \begin{cases} 0,\ \mu \ge 0; \\ \dfrac{z_0 - \mu}{2}\exp\left(\dfrac{h-1}{h}\dfrac{|z|}{\mu}\right),\ \mu<0. \end{cases} \tag{29}$$

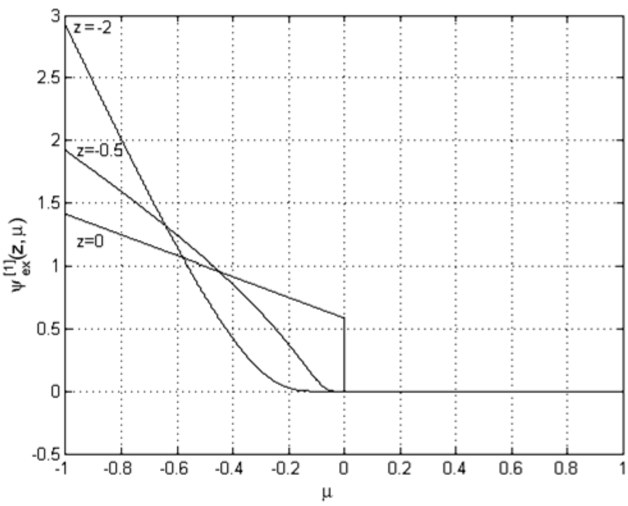


Рис. 5. Зависимость нормированной на единицу ( $\int_{-1}^{1} d\mu\psi_{ex}^{[1]}(z,\mu) = 1$ ) функции $\psi_{ex}^{[1]}(z,\mu,h)$ для $h=2$.

Отметим, что для $z=0$ формулы (29) и (14) совпадают. Графическая зависимость $\psi_{ex}^{[1]}(z,\mu,h>1)$ дана на рис. 5.

Графики рис. 5 показывают, что при удалении от границы в сторону вакуума резко возрастает доля нейтронов, летящих перпендикулярно плоскости $z = 0$.

Используя функцию распределения нейтронов (29), получим аналитические формулы для нейтронной плотности и векторных потоков за пределами среды.

Запишем выражение для нейтронной плотности

$$n_{ex}^{[1]}(z, h \ge 1) = -\frac{1}{4}\left[\gamma^2 Ei(-\gamma) + (\gamma - 1)e^{-\gamma}\right] + $$

$$+ \frac{z_0}{2}\left[\gamma Ei(-\gamma) + e^{-\gamma}\right]. \qquad (30)$$

Здесь и ниже $\gamma = \frac{h-1}{h}|z|$. На границе $z = 0$ формулы (30) и (15) совпадают, т. е. соблюдается условие сшивки решений для двух полупространств. На рис. 6 графически представлены зависимости относительной нейтронной плотности $\Phi_{ex}(z,h) = \frac{n_{ex}(z,h)}{n_{ex}(z=0,h)}$ для $h = 2, 1$.

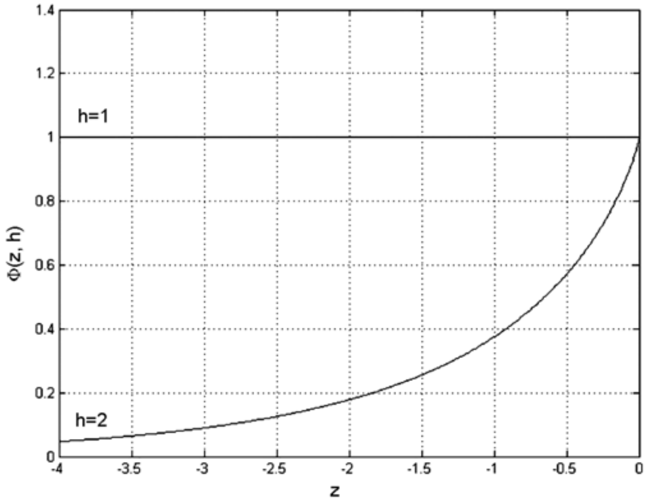


Рис. 6. Зависимости функции $\Phi_{ex}(z,h)$ для $h = 2, 1$

Убывание нейтронной плотности при удалении точки наблюдения от размножающей нестационарной системы связано с эффектом $\lambda$ – поглощения нейтронов (см. [3]).

Выпишем формулы для векторных потоков за пределами среды (см. также формулы (18)–(23), справедливые внутри среды)

$$j_{+ex}^{[1]}(z, h \ge 1) = 0; \qquad (31)$$

$$j_{-ex}^{[1]}(z, h \ge 1) = j_{ex}^{[1]}(z, h \ge 1) = \frac{V}{2}\left\{\frac{z_0}{2}\left[\gamma^2 Ei(-\gamma) + e^{-\gamma}(\gamma - 1)\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{e^{-\gamma}}{3}\left[1 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\right] - \frac{\gamma^3}{6}Ei(-\gamma)\right\}. \qquad (32)$$

Графически эти зависимости представлены на рис. 7.

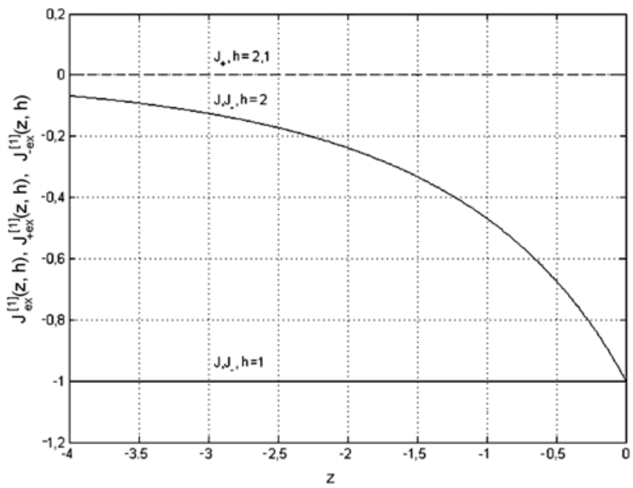


Рис. 7. Графики функций $J_{ex}^{[1]}(z,h), J_{-ex}^{[1]}(z,h)$ (сплошная линия), $J_{+ex}^{[1]}(z,h)$ (пунктир) для $h = 2, 1$

На рис. 7 использованы следующие обозначения:

$$J_{ex}^{[1]}(z) = \frac{j_{ex}^{[1]}(z)}{\left|j_{ex}^{[1]}(z=0)\right|}, \quad J_{+ex}^{[1]} = \frac{j_{+ex}^{[1]}(z)}{\left|j_{ex}^{[1]}(z=0)\right|},$$

$$J_{ex\_}^{[1]} = \frac{j_{-ex}^{[1]}(z)}{\left|j_{ex}^{[1]}(z=0)\right|}.$$

### 3.2. О распределении частиц за пределами нейтронопоглощающей среды

Если при $h > 1$ правильным решением задачи Милна является нестационарное (см. [3]), то для $h < 1$ стационарные решения (см. [1, 2]) следует расценивать в качестве основных, имея в виду, что нестационарные распределения нейтронов в среде [3] тоже не противоречат физическому смыслу. Вопрос же о применимости экспоненциального закона при исследовании нейтронного поля за пределами среды с $h < 1$ пока остается открытым. Покажем это на конкретном примере.

Пусть в начальный момент в нейтронопоглощающую среду «впрыснуто» некоторое конечное число нейтронов. Со временем количество нейтронов в среде уменьшается по экспоненциальному закону. Очевидно, количество нейтронов в пустоте должно увеличиваться до тех пор, пока поступающие из среды нейтроны в последней полностью не исчезнут (в основном за счет поглощения). После этого в вакууме число нейтронов будет постоянным (неизменным со временем). Таким образом, в рассмотренном примере нейтронные процессы в вакууме нестационарны и не подчиняются экспоненциальному закону (4), который в частном случае $(h < 1,\ z < 0)$ был необоснованно принят в работе [3]. Отметим, что после исчезновения нейтронов в среде, постоянным будет оставаться только полное число нейтронов в вакууме, а их пространственное распределение изменяется со временем, поскольку нейтронный цуг, разлетаясь, удаляется от границы среды.

## Основные выводы

В рамках задачи Милна получены приближенные аналитические формулы для различных физических характеристик. Формулы и построенные с их помощью графики дают достаточно полное наглядное представление о процессах нейтронной кинетики, протекающих в рассмотренной системе.

## Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

2. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Особенности односкоростной кинетики нейтронов в оптически толстых однородных системах и решение квазистационарного варианта задачи Милна // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 21–31.

4. Placzek G., Seidel W. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 550.

5. Placzek G. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 556.

6. Mark C. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 558.

7. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Особенности пространственного распределения нейтронов вблизи границ // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 3. С. 32–37.

Статья поступила в редакцию 26.03.2009