УДК 539.17

ПОЛЕ НЕЙТРОНОВ В НАДКРИТИЧЕСКОЙ АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СРЕД

Н. Б. Бабичев, П. С. Бондарев

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получено аналитическое решение задачи о распределении нейтронов в надкритической активной системе из двух полубесконечных сред, которые соприкасаются на плоской границе раздела.

Введение

Общая задача Милна заключена в определении нейтронного поля в двух полубесконечных пространствах, однородно заполненных разными веществами, которые соприкасаются на плоской границе раздела [1, 2].

Частным является тот случай общей задачи Милна, когда вместо одной из двух сред рассматривается пустое полубесконечное пространство (вакуум). Стационарные решения частной задачи Милна приведены в работах [1, 2]. В случае размножающей нейтроны активной среды стационарное решение частной задачи Милна [1, 2], как известно, находится в противоречии с физическим смыслом, поскольку оно приводит к возникновению внутри вещества областей с отрицательной плотностью нейтронов. Физическим решением частной задачи Милна в случае активной среды является полученное в работе [3] решение с экспоненциальным возрастанием функции распределения нейтронов со временем.

Если хотя бы одна из двух сред является активной, то стационарное решение общей задачи Милна тоже невозможно, так как за счет реакций деления ядер нейтронная кинетика изменяется со временем, подчиняясь экспоненциальному закону.

Основная цель данной работы состоит в нахождении физических решений общей задачи Милна для случая, когда одна среда или обе среды размножают нейтроны.

Постановка задачи сформулирована в разделе 1. В разделах 2, 3 представлен ряд известных формул, которые далее необходимы при получении новых теоретических результатов в разделах 4, 5. Сравнение новых аналитических решений с численными дано в разделе 6.

1. Постановка задачи. Основные формулы и приближения

Будем решать задачу о распределении плотности частиц в бесконечном пространстве, заполненном двумя разными по своим свойствам средами, которые разделены плоской границей раздела.

Ниже приняты те же физические предположения, что и в задаче Милна (см. [1, 2]):

– скорость у всех частиц одинаковая и не изменяется при столкновении частиц (задача односкоростная);

– рассеяние упругое и считается изотропным в лабораторной системе, а неупругие процессы отсутствуют;

– вещество считается неподвижным.

Рассмотрим кинетическое уравнение

$$\frac{\partial\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)}{\partial t}+V\vec{\Omega}\,\mathrm{grad}\,\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)= -V\alpha\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)+\frac{\beta V}{4\pi}\int\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\Omega, \quad (1)$$

где V – абсолютная величина скорости; $\alpha=n_{я}\left(\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c\right)$ и $\beta=h\alpha$ – параметры среды (параметры Пайерлса); $h=\dfrac{\nu\sigma_f+\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c}$ – активность среды (в дальнейшем изложении величину h будем тоже относить к параметрам среды); $n_{я}$ – плотность ядер; σ_s, σ_f, σ_c – микроскопические сечения рассеяния, деления и захвата; ν – среднее количество нейтронов, рождающихся в одном акте деления ядра; $\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ – плотность частиц, отнесенная к единице объема и единице телесного угла направления скорости; $\vec{\Omega}$ – единичный вектор направления скорости.

Кинетическое уравнение в плоском случае запишем в виде

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\psi\left(t,x,\mu\right)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi\left(t,x,\mu\right)}{\partial x}+\alpha\psi\left(t,x,\mu\right)=\frac{\beta}{2}\psi_0\left(t,x\right), \quad (2)$$

где x – координата; μ – косинус угла направления скорости с осью x; $\psi_0\left(t,x\right)$ – объемная плотность частиц

$$\psi_0(t,x)=\int_{-1}^{1}\psi(t,x,\mu)\,d\mu. \qquad (3)$$

В дальнейшем полагаем, что вещества однородные, а значит, параметры Пайерлса для них постоянны.

Рассмотрим две полубесконечные среды с плоской границей раздела и различные по своим свойствам (рис. 1).

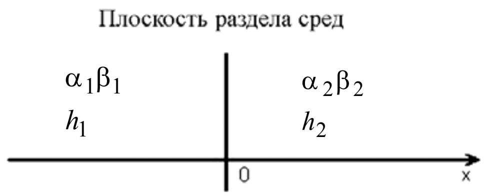

Рис. 1. Схема плоской геометрии двухобластной задачи Милна

Запишем кинетическое уравнение для каждого вещества

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\alpha_1\psi_1=\frac{\beta_1}{2}\psi_{10};\\&\frac{1}{V}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\alpha_2\psi_2=\frac{\beta_2}{2}\psi_{20},\end{aligned} \qquad (4)$$

где $\psi_1(t,x,\mu)$ и $\psi_2(t,x,\mu)$ – функции распределения для веществ с параметрами α_1, β_1 и α_2, β_2 соответственно.

К данным уравнениям надо еще добавить соответствующие граничные и начальные условия. Вид этих условий определим ниже.

Если хотя бы одна из двух сред размножает нейтроны, то эволюция собственной функции во времени подчиняется экспоненциальному закону

$$\psi(t,x,\mu)=e^{\lambda t}\psi(x,\mu). \qquad (5)$$

Для оптически толстых объектов $\lambda\approx\lambda_\infty$, где

$$\lambda_\infty=(\beta-\alpha)V=(h-1)\alpha V=n_я\left[(\nu-1)\sigma_f-\sigma_c\right]V \qquad (6)$$

– значение λ в бесконечной (полубесконечной) среде.

В задаче двух сред величина λ определяется тем бесконечным полупространством, для которого разность параметров Пайерлса $\beta-\alpha$ имеет наибольшее значение. Для определенности предположим, что $\beta_1-\alpha_1$ больше, чем $\beta_2-\alpha_2$. Тогда

$$\lambda=\lambda_{\infty1}=(\beta_1-\alpha_1)V \qquad (7)$$

и

$$\begin{aligned}&\psi_1(t,x,\mu)=e^{\lambda t}\psi_1(x,\mu);\\&\psi_2(t,x,\mu)=e^{\lambda t}\psi_2(x,\mu).\end{aligned} \qquad (8)$$

Подставляя выражения (8) в систему (4), сводим нестационарную задачу к стационарной с другими параметрами веществ

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\left(\alpha_1+\frac{\lambda}{V}\right)\psi_1=\frac{\beta_1}{2}\psi_{10};\\&\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\left(\alpha_2+\frac{\lambda}{V}\right)\psi_2=\frac{\beta_2}{2}\psi_{20},\end{aligned} \qquad (9)$$

где собственное значение λ определяется формулой (7).

В первом уравнении системы (9) сделаем замену

$$x=\frac{z_1}{\alpha_1+\dfrac{\lambda}{V}}=\frac{z_1}{\beta_1}, \qquad (10)$$

тогда получим

$$\mu\frac{\partial\psi_1(z_1,\mu)}{\partial z_1}+\psi_1=\frac{H_1}{2}\psi_{10}(z_1), \qquad (11)$$

где $H_1=1$.

Во втором уравнении делаем аналогичное преобразование

$$x=\frac{z_2}{\alpha_2+\dfrac{\lambda}{V}}=\frac{z_2}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}; \qquad (12)$$

$$\mu\frac{\partial\psi_2(z_2,\mu)}{\partial z_2}+\psi_2=\frac{H_2}{2}\psi_{20}(z_2), \qquad (13)$$

где

$$H_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}. \qquad (14)$$

В уравнениях (11) и (13) z_1 и z_2 – новые безразмерные переменные, которые в дальнейшем будем обозначать просто z.

Покажем, что при любых параметрах α_1, β_1, α_2, β_2 значение H_2 всегда меньше единицы при условии, что хотя бы одна из двух сред активна. Действительно, преобразуем выражение (14) к виду

$$H_2=\frac{h_2}{1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}(h_1-1)}=\frac{h_2}{1+\dfrac{\lambda_{\infty1}}{\lambda_{\infty2}}(h_2-1)}. \qquad (15)$$

По условию $\lambda_{\infty1}>\lambda_{\infty2}$, тогда есть два варианта:

1) обе среды активны (собственные значения обеих сред положительные) и

$$H_2<\frac{h_2}{1+(h_2-1)}=1;$$

2) только одна из сред является активной, тогда $\lambda_{\infty1}/\lambda_{\infty2}<0$ и

$$\frac{\lambda_{\infty1}}{\lambda_{\infty2}}(h_2-1)=\xi>0;$$

$$H_2=\frac{h_2}{1+\xi}<h_2<1.$$

Таким образом, нестационарная задача двух сред свелась к стационарной задаче с параметрами

$$\alpha_1'=\alpha_2'=1;$$

$$H_1=1;$$

$$H_2=H_2(h_1,\alpha_1,h_2,\alpha_2)<1.$$

Так как координата z – безразмерная переменная, то новые параметры α_1' и α_2' тоже безразмерны и равны единице.

Ю. А. Романовым в работе [1] была решена система уравнений (4) в стационарном приближении для случая, когда два вещества являются поглотителями $(h_1 < h_2 < 1)$. Для случая, когда одна из сред является инертной $(h = 1)$, необходимо совершить предельный переход в полученных им формулах.

2. Диффузионное приближение. Коэффициент диффузии

Рассмотрим уравнение (1) и предположим, что угловое распределение частиц можно аппроксимировать линейной функцией по μ

$$\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\psi_0\left(t,\vec{r}\right) + \frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\vec{\psi}_1\left(t,\vec{r}\right). \qquad (16)$$

Тогда для плотности частиц справедливо приближенное уравнение

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{V}{3\alpha}\operatorname{grad}\psi_0\right) + V\left(\alpha-\beta\right)\psi_0 = 0. \qquad (17)$$

В бесконечной однородной среде в стационарном случае уравнение (17) имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2} - 3\alpha\left(\alpha-\beta\right)\psi_0 = 0. \qquad (18)$$

В дальнейшем полагаем $h < 1$, так как нас интересует именно этот случай. Тогда уравнение (18) имеет аналитическое решение в виде суммы двух экспонент

$$\psi_0(z) = \tilde{C}_1 e^{\sqrt{3\alpha(\alpha-\beta)}z} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{3\alpha(\alpha-\beta)}z}. \qquad (19)$$

В случае бесконечной однородной среды стационарное уравнение

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial z} + \alpha\psi = \frac{\beta}{2}\psi_0$$

решается точно методом разделения переменных. Точное решение будет иметь вид

$$\psi(z,\mu) = C_1\frac{h}{2}\frac{e^{\alpha kz}}{1+k\mu} + C_2\frac{h}{2}\frac{e^{-\alpha kz}}{1-k\mu}; \qquad (20)$$

$$\psi_0(z) = C_1 e^{\alpha kz} + C_2 e^{-\alpha kz}; \qquad (21)$$

$$h\frac{\operatorname{arcth} k}{k} = 1. \qquad (22)$$

Сравнивая (19) и (21), замечаем, что:

1) общий вид решения одинаков (в обоих случаях линейные комбинации двух экспонент);

2) показатели экспонент различны $\left(k \neq \sqrt{3\left(1-h\right)}\right)$;

3) различие показателей тем больше, чем больше величина $1-h$. При $h = 1$ степени совпадают.

Мы можем формально получить точное решение кинетического уравнения для однородной, плоской и бесконечной среды, если в диффузионном уравнении (17) коэффициент диффузии $\frac{V}{3\alpha}$ положить равным

$$D_0 = \frac{1-h}{k^2}\frac{V}{\alpha}. \qquad (23)$$

Новый коэффициент диффузии будем называть асимптотическим коэффициентом диффузии.

Заметим, что при $h = 1$ уравнение диффузии вырождается

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2} = 0. \qquad (24)$$

Решением (24) будет уже не линейная комбинация экспонент, а линейная по z функция

$$\psi_0(z) = B + Az. \qquad (25)$$

Плотность частиц, определяемую кинетическим уравнением, будем в дальнейшем называть истинной плотностью и обозначать $\psi_0(z)$. Плотность, определяемую формулами типа (21) и (25), будем называть асимптотической плотностью и обозначать $n(z)$.

Пусть, например, в задаче двух сред (стационарной) поток направлен из среды 2 в среду 1 $(h_1 < h_2 < 1)$, тогда

$$\begin{aligned} n_1(z) &= A_1 e^{-\alpha_1 k_1 z} \quad (z > 0); \\ n_2(z) &= A_2 e^{-\alpha_2 k_2 z} + \mathrm{B}_2 e^{\alpha_2 k_2 z} \quad (z < 0). \end{aligned} \qquad (26)$$

Качественно зависимость плотности частиц от координаты представлена на рис. 2. Сплошная линия – асимптотическая плотность, штриховая – истинная.

Мы видим, что формулы (26) очень хорошо описывают поведение истинной плотности частиц вдали от границы раздела. Также, если истинная плотность на границе непрерывна, то асимптотическая испытывает скачок, величина которого определяется параметрами среды.

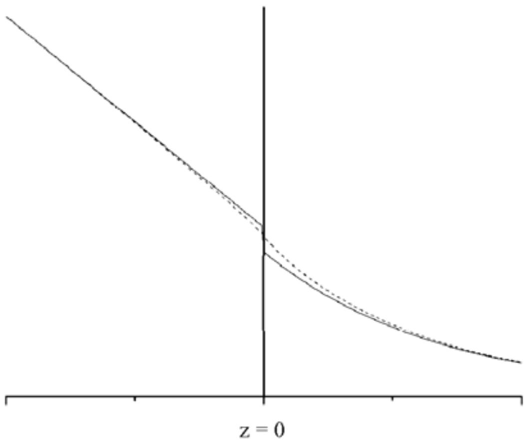

Рис. 2. Качественная зависимость плотности частиц от координаты z : ----- – $\psi_0\left(z\right)$; —— – $n\left(z\right)$

3. Решение кинетического уравнения для двух полубесконечных сред

Приведем некоторые вычисления и формулы из работы [1], которые потом будем использовать для решения нестационарной задачи двух сред.

3.1. Альбедное уравнение

Альбедное уравнение дает связь между распределением частиц, падающих на поверхность полубесконечной среды и угловым распределением отраженных частиц. Решаем уравнение

$$\mu \frac{\partial \psi(z,\mu)}{\partial z} + \psi(z,\mu) = \frac{h}{2}\psi_0(z); \qquad \psi_0(z) = \int_{-1}^{1} \psi(z,\mu)\, d\mu \tag{27}$$

с граничным условием

$$\psi(0,\mu) = \psi_+(\mu) \quad (\mu>0). \tag{28}$$

Необходимо найти $\psi(0,\mu) = \psi_-(|\mu|)$.

Решение этой задачи получено Ю. А. Романовым методом Винера – Хопфа, а иными методами – В. А. Амбарцумяном и Чандрасекаром. Интегральное соотношение, связывающее $\psi_+(\mu)$ и $\psi_-(\mu)$ $(0<\mu<1)$, имеет вид

$$\psi_-(\mu) = \frac{2}{h}\varphi(\mu)(1-k\mu)\int_0^1 \frac{\psi_+(\mu_0)(1-k\mu_0)\mu_0}{\mu+\mu_0} \times \varphi(\mu_0)\, d\mu_0, \tag{29}$$

где функция $\varphi(\mu)$ – угловое распределение в задаче Милна $\left(\psi(0,-\mu) \equiv \varphi(\mu)\psi_0(0)\right)$ – удовлетворяет уравнению

$$\int_0^1 \frac{y\varphi(y)}{y+\mu} dy = \frac{h}{2\varphi(\mu)\left(1-k^2\mu^2\right)}. \tag{30}$$

3.2. Угловое распределение на границе двух сред с плоской границей раздела

Пусть поток падает из среды 1 в среду 2.

$\psi_+(\mu)$ – угловое распределение частиц, падающих из среды 1 в среду 2;

$\psi_-(\mu)$ – угловое распределение частиц, выходящих из среды 2 и попадающих в среду 1.

Считаем, что плотность в среде 2 стремится к нулю при $z \to \infty$. Воспользуемся решением (29) альбедного уравнения для нахождения соотношения между ψ_+ и ψ_-

$$\psi_-(\mu) = \frac{2}{h_2}\varphi_2(\mu)(1-k_2\mu)\int_0^1 \frac{\psi_+(\mu_0)(1-k_2\mu_0)\mu_0}{\mu+\mu_0} \times \varphi_2(\mu_0)\, d\mu_0; \quad \varphi_2(\mu) = \varphi(k_2,\mu); \quad k_2 = k(h_2). \tag{31}$$

Другое уравнение аналогично соотношению (31), только необходимо выделить экспоненциально возрастающую часть функции (при $z \to \infty$ плотность стремится к бесконечности),

$$\psi_+(\mu) - C\varphi_1(\mu) = \frac{2}{h_1}\varphi_1(\mu)(1-k_1\mu)\int_0^1 \frac{\psi_-(\mu_0)(1-k_1\mu_0)\mu_0}{\mu+\mu_0}\varphi_1(\mu_0)\, d\mu_0; \tag{32}$$

$$\varphi_1(\mu) = \varphi(k_1,\mu); \quad k_1 = k(h_1),$$

где C – некоторая нормировочная константа.

Заметим, если $\psi_-(\mu) = 0$, то $\psi_+(\mu) = C\varphi_1(\mu)$. Таким образом, $C\varphi_1(\mu)$ – решение однородного уравнения для первой среды.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнениям (31) и (32) удовлетворяют функции

$$\psi_+(\mu) = Ah_2 \frac{1}{1-k_2\mu}\frac{\varphi_1(\mu)}{\varphi_2(\mu)}; \qquad \psi_-(\mu) = Ah_1 \frac{1-k_2\mu}{1-k_1^2\mu^2}\frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)}, \tag{33}$$

где A – новая нормировочная константа. Если предположить, что истинная плотность на границе равна единице

$$\int_0^1 \left(\psi_+(\mu) + \psi_-(\mu)\right) d\mu = 1,$$

то

$$A = \frac{1}{2}.$$

Тогда поток на границе раздела двух сред равен

$$j = \int_0^1 \mu\left(\psi_+(\mu) - \psi_-(\mu)\right) d\mu = \frac{\sqrt{(1-h_1)(1-h_2)}}{k_1}.$$

3.3. Плотность частиц

Плотность частиц $\psi_0(z)$ может быть выражена следующим образом:

$$\psi_0(z) = C_{1-}e^{-k_1 z} + C_{1+}e^{k_1 z} + \chi_1(z),\ z<0; \qquad \psi_0(z) = C_{2-}e^{-k_2 z} + \chi_2(z),\ z>0. \tag{34}$$

$\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$ – некоторые неизвестные функции, практически отличные от нуля лишь вблизи границы раздела двух сред.

Если в выражениях (34) выделить асимптотическую часть, то

$$\psi_0(z) = n_1(z) + \chi_1(z), \quad z<0; \qquad \psi_0(z) = n_2(z) + \chi_2(z), \quad z>0. \tag{35}$$

Асимптотические коэффициенты C_{1-}, C_{2-} и C_{1+} находятся как вычеты относительно полюсов $s = \pm k_i$ лапласовского образа $\Phi_{i,0}(s)$ функции $\psi_0(z)$, которая выражается через угловое распределение на границе $\psi(0,\mu)$ с помощью формул

$$\Phi_{10} = \frac{\int_0^1 \frac{\mu\psi_-(\mu)}{1+\mu s} d\mu - \int_0^1 \frac{\mu\psi_+(\mu)}{1-\mu s} d\mu}{1 - \frac{h_1}{s} \operatorname{arcth} s};$$
$$\Phi_{20} = \frac{\int_0^1 \frac{\mu\psi_+(\mu)}{1+\mu s} d\mu - \int_0^1 \frac{\mu\psi_-(\mu)}{1-\mu s} d\mu}{1 - \frac{h_2}{s} \operatorname{arcth} s}. \quad (36)$$

Результат интегрирования представим через функции

$$\tau(k,s) = \frac{s^2-1}{s^2-k^2}\left(1 - \frac{h(k)}{s}\operatorname{arcth} s\right); \quad (37)$$

$$\tau_-(k,s) = \frac{1}{(1+s)\int_0^1 \frac{\mu\varphi(k,\mu)}{1-\mu s} d\mu}. \quad (38)$$

Причем имеет место соотношение

$$\tau_-(k,s)\tau_-(k,-s) = \frac{1}{\tau(k,s)}. \quad (39)$$

Значения асимптотических коэффициентов равны

$$C_{1-} = \frac{k_1+k_2}{2k_1}\frac{\tau_{1-}(k_1)}{\tau_{2-}(k_1)};$$
$$C_{1+} = \frac{k_1-k_2}{2k_1}\frac{\tau_{2-}(k_1)}{\tau_{1-}(k_1)}\frac{\tau_2(k_1)}{\tau_1(k_1)}; \quad (40)$$
$$C_{2-} = \frac{\tau_{1-}(k_2)}{\tau_{2-}(k_2)}\frac{\tau_1(k_2)}{\tau_2(k_2)},$$

где $\tau_i(k_j) = \tau(k_i, k_j)$ и $\tau_{i-}(k_j) = \tau_-(k_i, k_j)$.

3.4. Граничные условия для асимптотической плотности

Если поток частиц падает из среды 1 в среду 2, то получаем решение вида (34) с коэффициентами, определяемыми формулами (40). Очевидно, если поток частиц идет из среды 2 в среду 1, то необходимо заменить индексы 2 на 1 и обратно. Асимптотические плотности в общем случае в задаче двух сред выражаются следующим образом:

$$n_1(z) = C_1 \frac{k_1+k_2}{2k_1}\frac{\tau_{1-}(k_1)}{\tau_{2-}(k_1)} e^{-k_1 z} + \left(C_1 \frac{k_1-k_2}{2k_1}\frac{\tau_{2-}(k_1)}{\tau_{1-}(k_1)}\frac{\tau_2(k_1)}{\tau_1(k_1)} + C_2 \frac{\tau_{2-}(k_1)}{\tau_{1-}(k_1)}\frac{\tau_2(k_1)}{\tau_1(k_1)}\right) e^{k_1 z},\ z<0;$$
$$n_2(z) = C_2 \frac{k_2+k_1}{2k_2}\frac{\tau_{2-}(k_2)}{\tau_{1-}(k_2)} e^{k_2 z} + \left(C_2 \frac{k_2-k_1}{2k_2}\frac{\tau_{1-}(k_2)}{\tau_{2-}(k_2)}\frac{\tau_1(k_2)}{\tau_2(k_2)} + C_1 \frac{\tau_{1-}(k_2)}{\tau_{2-}(k_2)}\frac{\tau_1(k_2)}{\tau_2(k_2)}\right) e^{-k_2 z},\ z>0; \quad (41)$$

Вместо $\tau_-(s)$ введем более удобную нам функцию $f(s)$

$$\tau_-(s) = \frac{1}{\sqrt{\tau(s)}}\sqrt{\frac{1-s}{1+s}} e^{sf(s)}, \quad (42)$$

где $f(s)$ определяется для положительных значений s и является функцией параметра h.

Сделаем замену функций $\tau_-(s)$ в выражениях для асимптотических плотностей (41) и обозначим

$$z_1 = f_1(k_1) - f_2(k_1);$$
$$z_2 = f_2(k_2) - f_1(k_2). \quad (43)$$

Величины z_1 и z_2 будем называть экстраполированными длинами.

Асимптотические плотности в задаче двух сред можно найти по формулам

$$n_1(z) = \sqrt{\frac{\tau_2(k_1)}{\tau_1(k_1)}}\left[A \operatorname{ch} k_1(z-z_1) + \frac{B}{k_1}\operatorname{sh} k_1(z-z_1)\right],\ z<0;$$
$$n_2(z) = \sqrt{\frac{\tau_1(k_2)}{\tau_2(k_2)}}\left[A \operatorname{ch} k_2(z+z_2) + \frac{B}{k_2}\operatorname{sh} k_2(z+z_2)\right],\ z>0, \quad (44)$$

где *A* и *B* новые неизвестные константы.

Граничные условия получаются исключением *A* и *B* из решения:

1) непрерывность логарифмических производных в точках z_1 и $-z_2$

$$\frac{n_1'(z_1)}{n_1(z_1)} = \frac{n_2'(-z_2)}{n_2(-z_2)}; \quad (45)$$

2) скачок плотностей в точках z_1 и $-z_2$

$$\frac{n_1(z_1)}{\gamma(h_1)} = \frac{n_2(-z_2)}{\gamma(h_2)}. \quad (46)$$

Здесь

$$\gamma(h) = \sqrt{\frac{2k^2(1-k^2)}{3h(k^2-1+h)}}, \quad k = k(h). \quad (47)$$

Напомним, что данное решение и граничные условия для асимптотических плотностей были получены Ю. А. Романовым. Мы только привели некоторые результаты его работы.

Зная асимптотические плотности, можно найти значение истинной плотности и истинного потока на границе раздела двух сред

$$\psi(0) = \sqrt{\frac{k_2^2-k_1^2}{3(h_1-h_2)}}\frac{n_1(z_1)}{\gamma(h_1)}; \quad (48)$$

$$j(0) = -\frac{\sqrt{(1-h_1)(1-h_2)}}{k_1 k_2}\sqrt{\frac{k_2^2-k_1^2}{3(h_1-h_2)}}\frac{n_1'(z_1)}{\gamma(h_1)}. \quad (49)$$

Граничные условия (45) и (46) можно заменить эквивалентными условиями: совпадение истинной плотности и истинного потока на границе раздела.

4. Решение задачи в случае надкритической системы

В разделе 1 была сформулирована задача двух сред с плоской границей раздела и было показано, что нестационарная задача в случае надкритической системы сводится к стационарной только с другими параметрами веществ.

Будем решать систему уравнений (4), которая сводится к системе уравнений (11) и (13). Введем следующие новые параметры

$$\alpha_1' = \alpha_2' = 1;$$

$$H_1 = 1;$$

$$H_2 = h = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1} < 1. \qquad (50)$$

В дальнейшем изложении считаем, что величина h без индекса определяется по формуле (50).

Воспользуемся формулами асимптотической диффузионной теории и запишем решение в каждом веществе

$$n_1(z) = Az + B = A_1(z - z_0) + 1, \quad z < 0;$$
$$n_2(z) = A_2 e^{-kz}, \quad z > 0; \qquad (51)$$
$$k = k(h) \quad (h \operatorname{arcth} k = k).$$

Предполагается, что при $z \to \infty$ плотность нейтронов стремится к нулю. В точке $z = z_0$ сделали нормировку плотности на единицу. Значение z_0 можно взять произвольным, но для сравнения с истинной плотностью, которая тоже равна единице в этой точке, необходимо выполнение условия $\beta_i z_0 \gg 1$, где β_i соответствует среде, в которой выбирается точка.

Выражения (51) содержат две неизвестные константы, которые будем искать, используя граничные условия (45) и (46).

В формулы (45) и (46) входят функции γ_1, γ_2, z_1 и z_2. Для среды, активность которой меньше единицы, можно использовать приведенные выше формулы (42), (43) и (47). Получим предельным переходом соответствующие формулы для $h = 1$.

Сначала рассмотрим $\gamma(h)$

$$\gamma(h) = \sqrt{\frac{2k^2(1-k^2)}{3h(k^2 - 1 + h)}},$$

или

$$\gamma(h) = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{1-k^2}{h}\frac{1}{1-\frac{1-h}{k^2}}}.$$

При $h \to 1$ из уравнения для k следует, что $k \to 0$, тогда

$$\frac{1-k^2}{h} \to 1;$$

$$\frac{1-h}{k^2} \to \frac{1}{3}.$$

Для функции γ_1 получим

$$\gamma_1(h = 1, k = 0) = 1. \qquad (52)$$

Таким образом, для $h = 1$ функция γ_1 не зависит от значения активности другой среды и равна единице.

Для нахождения экстраполированной длины z_1 по формуле (43) требуется знать значения функций $f_1(k)$ и $f_2(k)$ при $k = 0$.

Перепишем соотношение (42) в виде

$$e^{sf(s)} = \tau_-(s)\sqrt{\tau(s)}\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}. \qquad (53)$$

Из соотношения (39) следует, что

$$\tau_-(0)\sqrt{\tau(0)} = 1.$$

Таким образом, при $s \to 0$

$$\tau_-(s)\sqrt{\tau(s)} \approx 1. \qquad (54)$$

Учитывая соотношение (54), разложим правую и левую части выражения (53) в ряд Тейлора по степеням s в окрестности точки $s = 0$ и получим

$$1 + sf(s) \approx 1 + s. \qquad (55)$$

Откуда следует, что

$$f_i(k = 0) = 1, \quad i = 1, 2. \qquad (56)$$

Значение функции f_i в точке $k = 0$ получилось независящим от свойств второго вещества. Если функцию $\tau_-(s)\sqrt{\tau(s)}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $s = 0$ до линейного члена включительно, то можно уточнить формулу (56). В результате получим выражение для функции f_i, в которое будет входить активность второго вещества. Но это выражение имеет очень сложную структуру и для каждого h находится численно. Поэтому будем использовать для дальнейших расчетов формулу (56).

Подставляем $f_1(k = 0)$ и $f_2(k = 0)$ в формулы (43) и получаем значение экстраполированной длины z_1

$$z_1 = 0. \qquad (57)$$

Теперь можно воспользоваться граничными условиями (45) и (46) для нахождения констант A_1 и A_2.

1) Равенство логарифмических производных в экстраполированных точках

$$\frac{n_1'(z_1)}{n_1(z_1)} = \frac{n_2'(-z_2)}{n_2(-z_2)};$$

$$\frac{A_1}{A_1(z_1 - z_0) + 1} = -k;$$

$$A_1 = -\frac{k}{1 + k(z_1 - z_0)}.$$

2) Скачок асимптотических плотностей в экстраполированных точках

$$\frac{n_1(z_1)}{\gamma_1} = \frac{n_2(-z_2)}{\gamma_2(h)};$$

$$\frac{A_1(z_1 - z_0) + 1}{\gamma_1} = \frac{A_2 e^{kz_2}}{\gamma_2};$$

$$A_2 = \frac{1}{1 + k(z_1 - z_0)} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} e^{-kz_2}.$$

Учитывая, что $\gamma_1 = 1$ и $z_1 = 0$, находим выражения для асимптотических плотностей в задаче двух сред

$$n_1(z) = \frac{1 - kz}{1 - kz_0}, \quad z < 0;$$
$$n_2(z) = \frac{\gamma_2}{1 - kz_0} e^{-k(z + z_2)}, \quad z > 0, \tag{58}$$

где γ_2 определяется формулой (47), а z_2 – (43).

Вспоминаем, что в выражениях (58) надо заменить z на $\beta_1 x$ при $z < 0$ $(x < 0)$ и z на $(\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1)x$ при $z > 0$ $(x > 0)$. Для сохранения нормировки на единицу в точке $x = x_0$ заменим также z_0 на $\beta_1 x_0$.

Тогда

$$n_1(x) = \frac{1 - k\beta_1 x}{1 - k\beta_1 x_0}, \quad x < 0;$$
$$n_2(x) = \frac{\gamma_2}{1 - k\beta_1 x_0} e^{-k((\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1)x + z_2)}, \quad x > 0. \tag{59}$$

Умножим выражение (59) на $e^{\lambda t}$ и получим искомое решение нестационарной задачи о распределении плотности частиц в бесконечном пространстве, заполненном двумя разными по своим свойствам средами (хотя бы одна из которых активна), которые разделены плоской границей раздела

$$n_1(t, x) = \frac{1 - k\beta_1 x}{1 - k\beta_1 x_0} e^{\lambda t}, \quad x < 0;$$
$$n_2(t, x) = \frac{\gamma_2}{1 - k\beta_1 x_0} e^{-k((\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1)x + z_2) + \lambda t}, \quad x > 0;$$
$$\lambda = \lambda_{\infty 1} = (\beta_1 - \alpha_1)V; \tag{60}$$
$$k = k\left(h = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1}\right).$$

Отметим ряд особенностей решения (60):

1) в среде, которой соответствует наибольшее значение параметра λ, асимптотическая плотность зависит от координаты линейно, причем в коэффициенты не входят параметры второй среды (не считая зависимости от k), они определяются только параметрами данной среды и нормировкой решения. Это следует из сделанных нами приближений;

2) в другом полупространстве асимптотическая плотность экспоненциально убывает при удалении от границы раздела и зависит от свойств обоих веществ;

3) на границе асимптотическая плотность в любой момент времени испытывает скачок

$$\frac{\Delta n(x=0)}{n_1(x=0)} = 1 - \frac{n_2(x=0)}{n_1(x=0)} = 1 - \gamma_2 e^{-kz_2}.$$

Истинная плотность на границе равна

$$\psi(0) = \sqrt{\frac{k^2}{3(1-h)}} n_1(0).$$

При $h \to 1$ (параметры Пайерлса сред практически одинаковы)

$$\frac{\psi(0)}{n_1(0)} = \sqrt{\frac{k^2}{3(1-h)}} \to 1.$$

Таким образом, чем меньше разность $(1-h)$, тем лучше формулы для асимптотической плотности описывают поведение истинной плотности на границе раздела.

5. Подобие в нестационарной задаче двух сред

В разделе 1 было показано, что нестационарную задачу двух сред можно свести к стационарной с новыми параметрами

$$\alpha_1' = \alpha_2' = 1;$$
$$H_1 = 1;$$
$$H_2 = H_2(h_1, \alpha_1, h_2, \alpha_2) = \frac{h_2}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(h_1 - 1)} < 1.$$

Пусть $\psi_{01}(t, x)$ и $\psi_{02}(t, x)$ – решения некоторой задачи двух сред, т.е. истинные плотности соответственно слева (α_1, h_1) и справа (α_2, h_2) от границы раздела, а $\tilde{\psi}_{01}(t, x)$ и $\tilde{\psi}_{02}(t, x)$ – решения задачи с параметрами $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{h}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{h}_2$. Предполагаем для определенности, что выполняются соотношения

$$\lambda = \lambda_{\infty 1} = (\beta_1 - \alpha_1)V > \lambda_{\infty 2} = (\beta_2 - \alpha_2)V;$$
$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{\infty 1} = (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1)\tilde{V} > \tilde{\lambda}_{\infty 2} = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\alpha}_2)\tilde{V}.$$

Покажем, что, зная истинную плотность в задаче двух сред с параметрами α_1, h_1, α_2, h_2, можно получить решение задачи с параметрами $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{h}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{h}_2$ при условии

$$\frac{h_2}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(h_1 - 1)} = \frac{\tilde{h}_2}{1 + \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_2}(\tilde{h}_1 - 1)}. \tag{61}$$

Действительно, после приведения задач к стационарным, согласно условию (61), получим

$$\alpha_1' = \alpha_2' = \tilde{\alpha}_1' = \tilde{\alpha}_2' = 1;$$
$$H_1 = \tilde{H}_1 = 1;$$
$$H_2 = \tilde{H}_2,$$

значит, решения этих задач совпадают (или отличаются на некоторый постоянный множитель).

Исключим экспоненциальную зависимость от времени в решениях

$$\psi_{01}(x)=\psi_{01}(t,x)e^{-\lambda t};\quad \psi_{02}(x)=\psi_{02}(t,x)e^{-\lambda t};$$

$$\tilde{\psi}_{01}(x)=\tilde{\psi}_{01}(t,x)e^{-\tilde{\lambda} t};\quad \tilde{\psi}_{02}(x)=\tilde{\psi}_{02}(t,x)e^{-\tilde{\lambda} t}.$$

Применим к функциям $\psi_{01}(x)$ и $\psi_{02}(x)$ преобразования типа (10) и (12). Проделаем то же самое с $\tilde{\psi}_{01}(x)$ и $\tilde{\psi}_{02}(x)$. Полученные выражения – решения одной задачи (согласно условию (61)), тогда

$$\begin{aligned}&\psi_{01}\left(\frac{x}{\beta_1}\right)=\mathrm{const}\tilde{\psi}_{01}\left(\frac{x}{\tilde{\beta}_1}\right),\quad x<0;\\ &\psi_{02}\left(\frac{x}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}\right)=\mathrm{const}\tilde{\psi}_{02}\left(\frac{x}{\tilde{\alpha}_2-\tilde{\alpha}_1+\tilde{\beta}_1}\right),\quad x>0\end{aligned}\tag{62}$$

или

$$\begin{aligned}&\tilde{\psi}_{01}(x)=\mathrm{const}\psi_{01}\left(x\frac{\tilde{\beta}_1}{\beta_1}\right),\quad x<0;\\ &\tilde{\psi}_{02}(x)=\mathrm{const}\psi_{02}\left(x\frac{\tilde{\alpha}_2-\tilde{\alpha}_1+\tilde{\beta}_1}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}\right),\quad x>0.\end{aligned}\tag{63}$$

Из соотношения (61) следует, что

$$\frac{\tilde{\alpha}_2-\tilde{\alpha}_1+\tilde{\beta}_1}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}=\frac{\tilde{\beta}_2}{\beta_2}.$$

Выражения (63) упрощаются

$$\begin{aligned}&\tilde{\psi}_{01}(x)=\mathrm{const}\psi_{01}\left(x\frac{\tilde{\beta}_1}{\beta_1}\right),\quad x<0;\\ &\tilde{\psi}_{02}(x)=\mathrm{const}\psi_{02}\left(x\frac{\tilde{\beta}_2}{\beta_2}\right),\quad x>0.\end{aligned}\tag{64}$$

Формулы (64) можно объединить в одну

$$\tilde{\psi}_0(x)=\mathrm{const}\psi_0\left(x\frac{\tilde{\beta}}{\beta}\right),\tag{65}$$

где параметры Пайерлса берутся из области, соответствующей знаку переменной x.

Таким образом, если известно одно точное (или приближенное) решение задачи двух сред, то можно построить решение вида (65) для бесконечного множества задач с параметрами, удовлетворяющими условию (61).

6. Численное решение задачи двух сред. Сравнение численного и аналитического решений

Задача двух сред была решена численно по математической методике [5]. Все численные расчеты были выполнены С. В. Мжачих и Н. В. Колобяниной.

Чтобы смоделировать бесконечную среду, рассматривались конечные по размерам $(-x_{\max}\le x\le x_{\max})$ плоские системы с очень большой оптической толщиной. Решалось нестационарное кинетическое уравнение

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\psi(t,x,\mu)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi(t,x,\mu)}{\partial x}+\alpha\psi(t,x,\mu)=\frac{h\alpha}{2}n(t,x);$$

$$n(t,x)=\int_{-1}^{1}\psi(t,x,\mu)\,d\mu$$

с граничными условиями

$$\psi(t,x=-x_{\max},\mu>0)=0;\quad \psi(t,x=x_{\max},\mu<0)=0$$

и с начальным условием

$$\psi(t=0,-x_{\max}<x<x_{\max},\mu)=\mathrm{const}.$$

Параметры Пайерлса слева и справа от границы раздела были постоянными, а на границе испытывали скачок.

В случае, когда обе среды размножали нейтроны $(h_1>1,\ h_2>1)$, численное решение вышло на следующий равновесный экспоненциальный закон

$$\psi(t,x,\mu)=e^{\lambda' t}\psi(x,\mu).$$

При этом $\lambda'=\lambda-\Delta\lambda$ $(\Delta\lambda>0,\ \Delta\lambda/\lambda\ll 1)$, где $\lambda=(h-1)\alpha V$ – соответствующее наибольшее значение данного параметра для двух сред, как и предполагалось при получении аналитического решения.

На рис. 3–6 показана зависимость плотности частиц от координаты x для задачи с параметрами $h_1=1{,}5$, $h_2=1{,}05$, $\alpha_1=1/h_1$ (1/см), $\alpha_2=1/h_2$ (1/см) слева и справа от границы раздела соответственно. Плотность нормирована на единицу в точке $x=-3$ см. Штрихованная кривая – численное решение $\psi_0(x)$, сплошная – аналитическое решение $n(z)$ вида (60). Исходя из рисунков и численных расчетов, можно сделать следующие выводы.

Полученные аналитические формулы прекрасно согласуются с математическими расчетами. Как и предполагалось, в среде с наибольшим собственным значением плотность вдали от границы раздела линейно зависит от координаты.

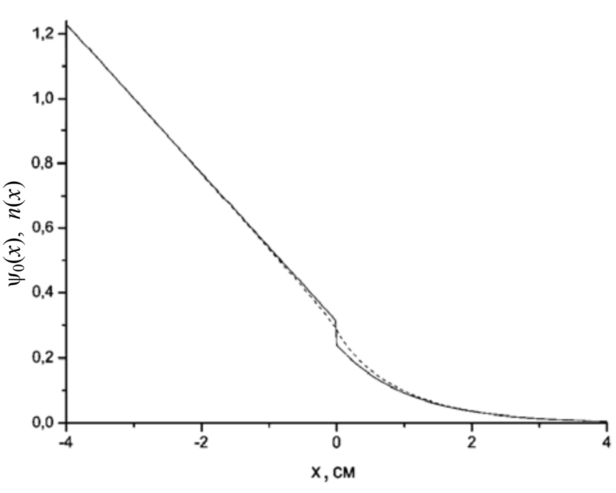

Рис. 3. Зависимость плотности от координаты x (см) на отрезке $-4<x<4$: -------- – $\psi_0(x)$; ——— – $n(x)$

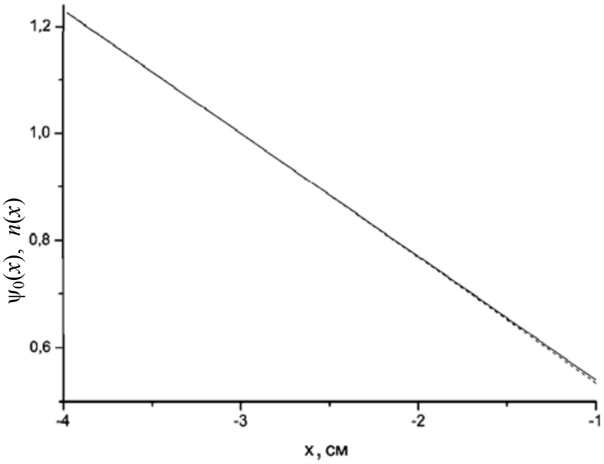

Рис. 4. Зависимость плотности от координаты x (см) на отрезке $-4 < x < -1$: -------- – $\psi_0(x)$; ——— – $n(x)$

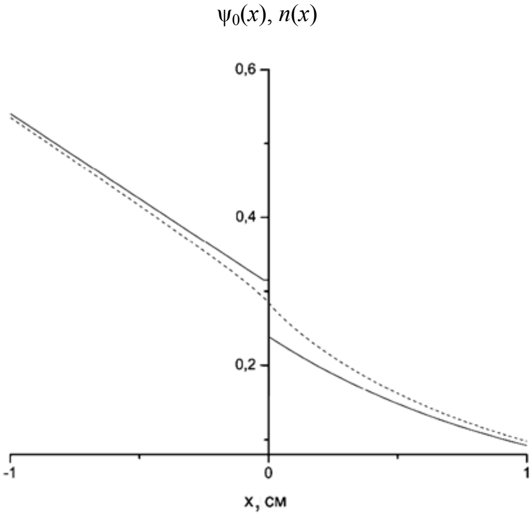

Рис. 5. Зависимость плотности от координаты x (см) на отрезке $-1 < x < 1$: -------- – $\psi_0(x)$; ——— – $n(x)$

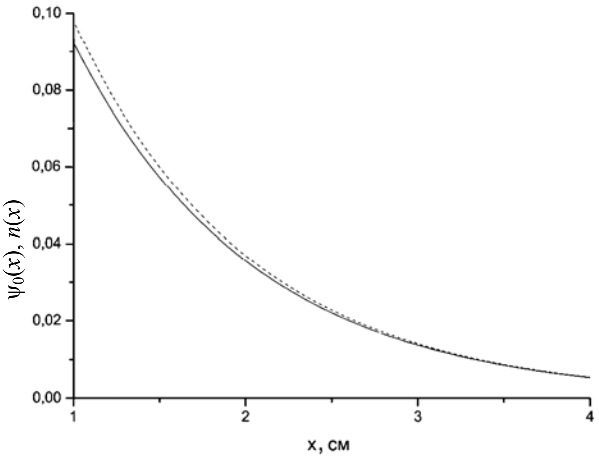

Рис. 6: Зависимость плотности от координаты x (см) на отрезке $1 < x < 4$: -------- – $\psi_0(x)$; ——— – $n(x)$

В среде с наименьшим значением параметра λ плотность, нормированная на константу на границе, экспоненциально затухает по мере удаления от границы раздела.

Полученные аналитические формулы наиболее точно описывают поведение плотности вдали от границы раздела.

Отличие плотности на границе, подсчитанной по формуле (48), от плотности, полученной численно, составляет десятые доли процента.

Заключение

Получено аналитическое решение общей задачи Милна с двумя средами, одна или каждая из которых размножает нейтроны. Известное ранее аналитическое решение общей задачи Милна соответствовало только случаю нейтронопоглощающих сред.

Список литературы

1. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Особенности односкоростной кинетики нейтронов в оптически толстых однородных системах и решение квазистационарного варианта задачи Милна // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 21–31.

4. Placzek G., Seidel W. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 550.

5. Мжачих С. В., Грошев Е. В., Юдинцев В. Ф. О некоторых свойствах $\tilde{D}S_n^{\gamma}$ – схем для сферически-симметричного уравнения переноса // ВАНТ. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2. С. 21–31.

Статья поступила в редакцию 26.03.2009