УДК 539.1.074

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЙТРОНОВ ОТ ТОЧЕЧНОГО АНИЗОТРОПНОГО ИСТОЧНИКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ И ВОЗДЕЙСТВИЕ НА АНИЗОТРОПНЫЙ ДЕТЕКТОР

В. И. Юферев

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получено аналитическое решение кинетического уравнения переноса нейтронов для однородной бесконечной среды в многогрупповом приближении для случая анизотропного источника и анизотропного детектора.

Решение кинетического уравнения переноса нейтронов от точечного изотропного источника нейтронов в бесконечной однородной среде в односкоростном приближении хорошо известно [1, 2]. Однако при анизотропном источнике и анизотропной чувствительности детектора аналитическое решение уравнения переноса отсутствует, что затрудняет разработку инженерных методов для проведения оценок результатов воздействия нейтронного излучения. Решение задачи численными методами возможно, например, методом Монте-Карло или другими известными методами решения кинетического уравнения, однако процесс обработки результатов является достаточно трудоемким из-за большого объема информации о многомерной функции распределения.

В данной работе получено аналитическое решение кинетического уравнения переноса нейтронов в многогрупповом приближении для случая анизотропного источника и анизотропного детектора. В результате в рамках данного приближения удалось выразить искомый функционал в явном виде. Решение записывается в виде интеграла с использованием специальных функций. Несмотря на достаточно сложный вид, полученное решение допускает численные расчеты с помощью стандартных методов вычисления интегралов без привлечения специальных методов решения кинетического уравнения переноса нейтронов.

1. Постановка задачи

Рассматривается результат воздействия нейтронного излучения от точечного анизотропного источника, расположенного в неограниченной однородной среде, на точечный детектор, удаленный от источника на расстояние r. Чувствительность детектора также является анизотропной, т. е. зависит от направления влета нейтрона в детектор.

В математическом виде при многогрупповом рассмотрении энергетического распределения нейтронов искомый результат записывается в виде следующего функционала от функций распределения нейтронов в среде:

$$\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)=\sum_{j=1}^{J}\int d\Omega\eta_j\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right)\varphi_j\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right), \qquad (1)$$

где $\varphi_j\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right)$ – функция распределения нейтронов j-й энергетической группы ($j = 1\div J$) в точке $\vec{r}$ с направлением движения $\vec{\Omega}$ при ориентации источника в пространстве, характеризуемой направлением $\vec{\Omega}_0$; $\eta_j\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right)$ – чувствительность детектора с ориентацией в пространстве, характеризуемой вектором $\vec{\ell}$, к нейтронам j-й энергетической группы и направлением движения $\vec{\Omega}$.

Функция распределения нейтронов в однородной, неограниченной, рассеивающей среде от точечного источника, расположенного в начале координат, является решением кинетического уравнения переноса нейтронов, которое в многогрупповом приближении и изотропном рассеянии записывается в виде

$$\vec{\Omega}\nabla\varphi_j\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right)+\alpha_j\varphi_j\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{i=j}\frac{\beta_{ij}}{4\pi}\int d\Omega'\varphi_i\left(\vec{r},\vec{\Omega}',\vec{\Omega}_0\right)+S_0\chi_j\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)\delta\left(\vec{r}\right), \qquad (2)$$

где α_j – полное сечение взаимодействия нейтронов j-й группы; β_{ij} – сечение перехода из i-й группы в j-ю; $\chi_j\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)$ – индикатриса выхода нейтронов j-й группы в направлении $\vec{\Omega}$; S_0 – полный выход нейтронов из источника.

Понимается, что индикатрисы выхода нейтронов из источника и уязвимости детектора являются осесимметричными функциями, зависящими только от косинуса угла между направлением движения нейтрона и вектором, характеризующим ориентацию детектора или источника в пространстве (функции скалярного произведения векторов $\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right)$ и $\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)$). Считается, что эти функции могут быть представлены в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$\chi_j\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \chi_n^j P_n\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right),$$

$$\eta_j\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{L} \frac{2\ell+1}{4\pi} \eta_\ell^j P_\ell\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right). \qquad (3)$$

Для дальнейшего анализа выберем систему координат с началом в точке размещения источника, осью $\vec{Z}$, совпадающей с направлением на детектор, и осью $\vec{X}$, направленной таким образом, чтобы вектор $\vec{\Omega}_0$ оказался в плоскости XZ (рис. 1).

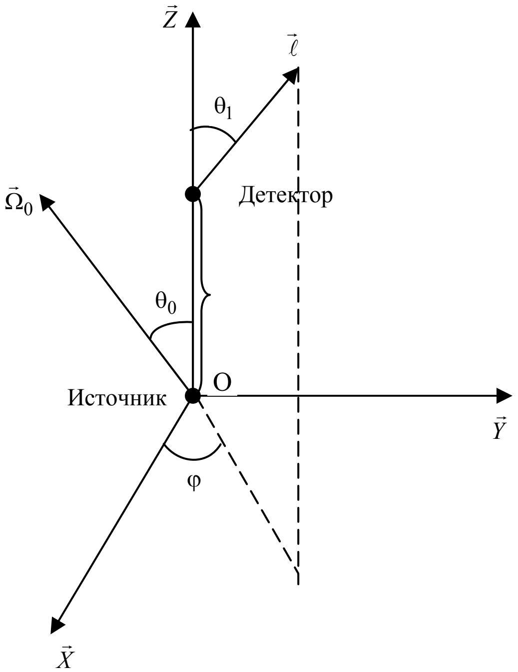

Рис. 1. Ориентация источника и детектора в выбранной системе координат

При этом ориентация векторов $\vec{\Omega}_0$ и $\vec{\ell}$ друг относительно друга будет определяться значениями направляющих косинусов этих векторов относительно оси $\vec{Z}$ – $\mu_0 = \cos\theta_0$, $\mu_1 = \cos\theta_1$ и углом φ между проекцией вектора $\vec{\ell}$ на плоскость XY и осью $\vec{X}$.

Таким образом, в отличие от задачи с изотропными индикатрисами, решение которой зависит лишь от одной переменной r – расстояния между источником и детектором, при анизотропных индикатрисах появляется зависимость еще от трех переменных μ_0, μ_1, φ, характеризующих взаимную ориентацию источника и детектора.

2. Решение уравнения переноса нейтронов

При решении уравнения переноса нейтронов (2) воспользуемся преобразованием Фурье по пространственной переменной. В результате для фурье-образа функции распределения из (2) получим выражение

$$\Phi_j\left(\vec{k},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right) = \frac{1}{\left(\alpha_j - i\vec{k}\vec{\Omega}\right)} \sum_{\rho=1}^{j} \frac{\beta_{\rho j}}{4\pi} \Phi_\rho^0\left(\vec{k},\vec{\Omega}_0\right) + \frac{S_0 \chi_j\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)}{\left(\alpha_j - i\vec{k}\vec{\Omega}\right)}, \qquad (4)$$

где $\Phi_j\left(\vec{k},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right) = \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} \varphi_j\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right)$ – фурье-образ функции распределения с ее обратным преобразованием $\varphi_j\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\ \mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}} \Phi_j\left(\vec{k},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right)$; $\Phi_\rho^0\left(\vec{k},\vec{\Omega}_0\right) = \int d\vec{\Omega}\ \Phi_\rho\left(\vec{k},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right)$.

Интегрируя уравнение (4) по всем направлениям $\vec{\Omega}$ и учитывая разложение индикатрисы выхода нейтронов в ряд по полиномам Лежандра (3), из (4) получим следующую систему уравнений для определения функций $\Phi_\rho^0\left(\vec{k},\vec{\Omega}_0\right)$:

$$\Phi_j^0\left(\vec{k},\vec{\Omega}_0\right) = \frac{1}{ik} Q_0\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) \sum_{\rho=1}^{j} \beta_{\rho j} \Phi_\rho^0\left(\vec{k},\vec{\Omega}_0\right) + S_0 \sum_{n=0}^{N} (2n+1) \chi_n^j \frac{1}{ik} Q_n\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) P_n\left(\vec{\Omega}_0 \vec{a}\right), \qquad (5)$$

где $Q_n\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) = \frac{ik}{4\pi} \int d\vec{\Omega} \frac{P_n\left(\vec{\Omega}\vec{a}\right)}{\left(\alpha_j - i\vec{k}\vec{\Omega}\right)}$ – функция Лежандра второго рода; k – модуль вектора $\vec{k}$; $\vec{a}$ – единичный вектор направления $\vec{k}$ $\left(\vec{k} = k\vec{a}\right)$.

Решение системы уравнений (5) может быть представлено в виде

$$\Phi_j^0\left(\vec{k},\vec{\Omega}_0\right) = S_0 \sum_{n=0}^{N} (2n+1) P_n\left(\vec{\Omega}_0 \vec{a}\right) \sum_{\rho=1}^{j} \chi_n^\rho \frac{1}{ik} Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right) A_{\rho j}(k), \qquad (6)$$

где $A_{\rho j}(k)$ – отношение алгебраического дополнения элемента $a_{\rho j}$ к детерминанту $\det\left[a_{\rho j}\right]$ для матрицы с элементами $a_{\rho j} = \delta_{\rho j} - \frac{1}{ik} Q_0\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) \beta_{\rho j}$, ($\delta_{\rho j}$ – символ Кронекера).

С учетом соотношения (6) решение уравнения (4) для фурье-образа функции распределения запишется в виде

$$\Phi_j\left(\vec{k},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_0\right) = \frac{S_0}{4\pi\left(\alpha_j - i\vec{k}\vec{\Omega}\right)} \sum_{n=0}^{N} (2n+1) \times$$

$$\times\left[\chi_n^j P_n\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)+P_n\left(\vec{\Omega}\vec{a}\right)\sum_{\rho=1}^{j}\chi_n^{\rho}\frac{1}{ik}Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)C_{\rho j}(k)\right], \quad (7)$$

где $C_{\rho j}\left(k\right)=\sum\limits_{\eta=\rho}^{j}\beta_{\eta j}A_{\rho\eta}(k)$.

Теперь после обратного преобразования Фурье выражения (7) искомый функционал (1) запишется следующим образом:

$$\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)=\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\; k^2\int d\vec{a}\; e^{-ikr\left(\vec{a}\vec{Z}\right)}\times$$

$$\times\int d\vec{\Omega}\eta_j\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right)\frac{S_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\left[\chi_n^j\frac{P_n\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)}{\left(\alpha_j-i\vec{k}\vec{\Omega}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_n\left(\vec{\Omega}\vec{a}\right)}{\left(\alpha_j-i\vec{k}\vec{\Omega}\right)}\sum_{\rho=1}^{j}\chi_n^{\rho}\frac{1}{ik}Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)C_{\rho j}(k)\right]. \quad (8)$$

Принимая во внимание разложение (3) и соотношение

$$e^{-ikr\left(\vec{a}\vec{Z}\right)}=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)(-i)^p J_{p+\frac{1}{2}}(kr)P_p\left(\vec{a}\vec{Z}\right),$$

где $J_{p+\frac{1}{2}}\left(x\right)$ – функция Бесселя, после интегрирования по угловым переменным $\vec{\Omega}$ и $\vec{a}$ соотношение (8) принимает вид

$$\psi\left(r,\vec{Z},\vec{\Omega}_0\vec{\ell}\right)=\frac{S_0}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{J}\sum_{\ell=0}^{L}\frac{2\ell+1}{4\pi}\eta_\ell^j\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}\times$$

$$\times\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)Z_{pn\ell}\left(\vec{Z},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)4\pi\int_0^\infty dkk^2\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}(-i)^p J_{p+\frac{1}{2}}(kr)\times$$

$$\times\left[\frac{\chi_n^j}{ik}Q_p\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right)+\sum_{\rho=1}^{j}\chi_n^{\rho}\frac{1}{ik}Q_\ell\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right)\frac{1}{ik}Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)C_{\rho j}(k)\right], \quad (9)$$

где $Z_{pn\ell}\left(\vec{Z},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)=\int d\Omega\; P_\ell\left(\vec{\Omega}\vec{\ell}\right)P_n\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)P_p\left(\vec{\Omega}\vec{Z}\right)$.

Для последующего анализа преобразуем выражение для функции $Z_{pn\ell}\left(\vec{Z},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)$ следующим образом. Представим полиномы Лежандра в виде разложения по сферическим гармоникам $P_n\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0\right)=\frac{4\pi}{2n+1}\times\;\times\sum\limits_{m=-n}^{n}Y_{mn}^*\left(\vec{\Omega}\right)Y_{mn}\left(\vec{\Omega}_0\right)$ и учтем известное значение интеграла от трех сферических гармоник [3]

$$\int d\Omega Y_{\ell m_\ell}\left(\vec{\Omega}\right)Y_{nm_n}\left(\vec{\Omega}\right)Y_{pm_p}^*\left(\vec{\Omega}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{(2n+1)(2\ell+1)}{4\pi(2p+1)}}C_{n_0,\ell_0}^{p_0}C_{nm_n,\ell m_l}^{pm_p},$$

где $C_{nm_n,\ell m_l}^{pm_p}$ – коэффициенты Клебша–Гордана.

Тогда соотношение для $Z_{pn\ell}\left(\vec{Z},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)$ запишется в виде

$$Z_{pn\ell}\left(\vec{Z},\vec{\Omega}_0,\vec{\ell}\right)=\frac{\left(4\pi\right)^{5/2}}{\left(2p+1\right)^{3/2}\left(2n+1\right)^{1/2}\left(2\ell+1\right)^{1/2}}\times$$

$$\times C_{n_0,\ell_0}^{p_0}\sum_{m_n=-n}^{n}Y_{nm_n}^*\left(\vec{\Omega}_0\right)\times$$

$$\times\sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell}Y_{\ell m_\ell}^*\left(\vec{\ell}\right)\sum_{m_p=-p}^{p}Y_{pm_p}\left(\vec{Z}\right)C_{nm_n,\ell m_\ell}^{pm_p}. \quad (10)$$

В выбранной системе координат (см. рис. 1), когда направляющий косинус единичного вектора $\vec{Z}$ равен единице, а азимутальный угол вектора $\vec{\Omega}_0$ равен нулю,

$$Y_{pm_p}\left(\vec{Z}\right)=\sqrt{\frac{2p+1}{4\pi}}\delta_{m_p 0};$$

$$Y_{nm_n}^*\left(\vec{\Omega}_0\right)=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m_n)!}{4\pi(n+m_n)!}}P_n^{m_n}(\mu_0); \quad (11)$$

$$Y_{\ell m_\ell}^*\left(\vec{\ell}\right)=\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m_\ell)!}{4\pi(\ell+m_\ell)!}}P_\ell^{m_\ell}(\mu_1)e^{-im_\ell\phi},$$

где $\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$ – символ Кронекера; $P_n^m(x)$ – присоединенный полином Лежандра.

Принимая во внимание свойства коэффициентов $C_{nm_n,\ell m_l}^{pm_p}$ и $C_{n_0,\ell_0}^{p_0}$ [3]

$\left|n-\ell\right|\leq p\leq n+\ell,\; m_n+m_\ell=m_p,\; n+\ell+p$ – четное число,

из соотношений (9), (10) и (11) получим следующие выражения для функции $Z\left(\mu_0,\mu_1,\varphi\right)$ и искомого функционала $\psi\left(r,\mu_0,\mu_1,\varphi\right)$, представленного в виде суммы двух компонент ψ_0 и $\psi_{\text{рас}}$, связанных соответственно с нерассеянным и рассеянным излучением

$$\psi\left(r,\mu_0,\mu_1,\varphi\right)=\psi_0+\psi_{\text{рас}};$$

$$\psi_0=\frac{S_0}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{J}\sum_{\ell}^{L}\frac{2\ell+1}{4\pi}\eta_\ell^j\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}\chi_n^j\times$$

$$\times\sum_{p=\left|n-\ell\right|}^{n+\ell}(2p+1)\,Z_{pn\ell}(\mu_0,\mu_1,\phi)I_p^j(r); \quad (12.1)$$

$$I_p^j(r)=4\pi\int_0^\infty dk\;\mathrm{k}^2\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}(-i)^p J_{p+\frac{1}{2}}(kr)\frac{1}{ik}Q_p\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right); \quad (12.2)$$

$$\psi_{\text{рас}}=\frac{S_0}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{J}\sum_{\ell=0}^{L}\frac{2\ell+1}{4\pi}\eta_\ell^j\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}\sum_{\rho}^{j}\chi_n^{\rho}\times$$

$$\times\sum_{p=\left|n-\ell\right|}^{n+\ell}(2p+1)\,Z_{pn\ell}(\mu_0,\mu_1,\phi)J_{pn\ell}^{\rho j}(r); \quad (12.3)$$

$$J^{\rho j}_{pn\ell}(r) = 4\pi \int_0^\infty dk\, k^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} (-i)^p J_{p+\frac{1}{2}}(kr) \left(\frac{1}{ik}\right)^2 \times$$

$$\times Q_\ell\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right) C_{\rho j}(k); \qquad (12.4)$$

$$Z_{pn\ell}(\mu_0, \mu_1, \phi) =$$

$$= \frac{4\pi}{2p+1}\left\{ \left(C^{p_0}_{n_0,\ell_0}\right)^2 P_n(\mu_0) P_\ell(\mu_1) + 2C^{p_0}_{n_0,\ell_0} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^{\min(n,\ell)} C^{p_0}_{nm,\ell-m} \sqrt{\frac{(n-m)!(\ell-m)!}{(n+m)!(\ell+m)!}} P^m_n(\mu_0) P^m_\ell(\mu_1) \cos m\phi \right\}. \qquad (12.5)$$

Следует отметить, что для нерассеянной компоненты нейтронного излучения ψ_0 из достаточно сложного соотношения (12.1) может быть получен простой, хорошо известный вид. Действительно, учитывая свойства преобразования Бесселя [4]

$$\int_0^\infty dk \frac{k^2}{\sqrt{kr}}\, J_{p+\frac{1}{2}}(kr) F(k) = f(r),$$

$$\int_0^\infty dr \frac{r^2}{\sqrt{kr}} J_{p+\frac{1}{2}}(kr) f(r) = F(k) \qquad (13)$$

и табличное значение интеграла [5],

$$\int_0^\infty dr \frac{e^{-\alpha r}}{\sqrt{r}} J_{p+\frac{1}{2}}(kr) =$$

$$= \frac{(k/2)^{p+\frac{1}{2}}}{\alpha^p} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{3}{2})} F\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p+2}{2}, p+\frac{3}{2}, -\frac{k^2}{\alpha^2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{1}{i^{p+1}} Q_p\left(\frac{\alpha}{ik}\right),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $F(a, b, c, x)$ – гипергеометрическая функция, из соотношения (12.2) можно получить, что $I^i_p(r) = 2\pi^2 \dfrac{e^{-\alpha_j r}}{r^2}$.

Подставляя это выражение в (12.1) и учитывая свойства коэффициентов Клебша – Гордана [3] $\sum_p C^{p0}_{n0,\ell 0} C^{p0}_{nm,\ell-m} = \delta_{m0}$, для нерассеянной компоненты получим стандартное простое соотношение

$$\psi_0(r, \mu_0, \mu_1) = \sum_{j=1}^{J} \frac{S_0 e^{-\alpha_j r}}{r^2} \chi_j(\mu_0) \eta_j(\mu_1). \qquad (14)$$

Дальнейший анализ выражений (12.3), (12.4) для рассеянной компоненты излучения затруднен тем, что функция $C_{\rho j}(k)$ в общем случае многогруппового приближения не выражается в явном виде, а находится через решение определителя (см. (6) и (7)), порядок которого равен числу энергетических групп. Однако поскольку функция $C_{\rho j}(k)$ связана только с энергетическими характеристиками процесса рассеяния и не зависит от вида индикатрис источника и детектора, то она может быть определена из данных о пространственном распределении флюенса нейтронов от точечного изотропного источника.

Допустим, из детальных численных расчетов, например методом Монте-Карло, известно решение задачи о пространственном распределении флюенса $F^{\text{рас}}_{\rho j}(R)$ рассеянных нейтронов в j-й энергетической группе от точечного изотропного источника единичной мощности $(S_0 = 1)$, излучающего нейтроны в ρ-й группе. В рамках рассматриваемого подхода из соотношений (13.3) и (13.4) следует, что такое распределение флюенса нейтронов, когда из всех χ^m_n и η^m_ℓ отличны от нулевых значений лишь $\chi^\rho_0 = 1$ и $\eta^j_0 = 4\pi$, описывается соотношением

$$F^{\text{рас}}_{\rho j}(R) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk\, k^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\, J_{1/2}(kR) \left(\frac{1}{ik}\right)^2 \times$$

$$\times Q_0\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) Q_0\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right) C_{\rho j}(k). \qquad (15)$$

Из соотношения (5) с учетом свойств преобразования Бесселя (13) можно выразить $C_{\rho j}(k)$ через известную функцию $F^{\text{рас}}_{\rho j}(R)$ и после подстановки в выражения (12.3), (12.4) получить следующую связь между искомым функционалом для анизотропных индикатрис источника и детектора с известным решением для флюенса рассеянных нейтронов для изотропных индикатрис:

$$\psi_{\text{рас}} = S_0 \sum_{j=1}^{J} \sum_{\ell}^{L} \frac{2\ell+1}{4\pi} \eta^j_\ell \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{\rho=1}^{j} \chi^\rho_n \times$$

$$\times \sum_{p=|n-\ell|}^{n+\ell} (2p+1)\, Z_{pn\ell}(\mu_0, \mu_1, \phi)\, J^{\rho j}_{pn\ell}(r); \qquad (16.1)$$

$$J^{\rho j}_{pn\ell}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\sqrt{kr}} (-i)^p J_{p+\frac{1}{2}}(kr) \frac{Q_\ell\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)}{Q_0\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) Q_0\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\infty dR \frac{1}{\sqrt{kR}} J_{1/2}(kR) 4\pi R^2 F^{\text{рас}}_{\rho j}(R). \qquad (16.2)$$

Дальнейшее упрощение выражения для рассеянной компоненты излучения $\psi_{\text{рас}}$ может быть достигнуто за счет представления $F^{\text{рас}}_{\rho j}(R)$ в удобном для интегрирования виде. Учитывая, что асимптотически пространственное распределение нейтронов от изотропного источника имеет вид [2]

$$F^{\text{рас}}(R) \approx \frac{1}{R} \sum_i e^{-\lambda_i R},$$

целесообразно использовать следующую аппроксимацию:

$$4\pi R^2 F_{\rho j}^{\text{рас}}(R) = R\sum_m A_{\rho j}^m e^{-\lambda_{\rho j}^m R}. \quad (17)$$

Тогда соотношение (16.2) упростится и примет вид

$$J_{pn\ell}^{\rho j}(r) = \frac{1}{4\pi}\sum_m A_{\rho j}^m \int_0^\infty dk \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} J_{p+\frac{1}{2}}(kr)(-i)^p \times$$

$$\times \frac{k^2}{\left[k^2 + \left(\lambda_{\rho j}^m\right)^2\right]} \frac{Q_\ell\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) Q_n\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)}{Q_0\left(\frac{\alpha_j}{ik}\right) Q_0\left(\frac{\alpha_\rho}{ik}\right)}. \quad (18)$$

Учитывая, что функция $i^{n+1}Q_n(ix)$ является функцией действительной переменной [6], а $p + n + \ell$ – четным числом, можно привести выражение для искомого функционала к окончательному виду без комплексных переменных

$$\psi(r,\mu_0,\mu_1\varphi) = \psi_0(r,\mu_0,\mu_1) + \psi_{\text{рас}}(r,\mu_0,\mu_1\varphi), \quad (19)$$

где $\psi_0(r,\mu_0,\mu_1) = \frac{S_0}{r^2}\sum_{j=1}^J \chi_j(\mu_0)\ \eta_j(\mu_1) e^{-\alpha_j r}$;

$$\psi_{\text{рас}}(r,\mu_0,\mu_1,\phi) = S_0 \sum_{j=1}^J \sum_{\rho=1}^j \sum_{\ell=0}^L \frac{2\ell+1}{4\pi}\ \eta_\ell^j \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{4\pi} \times$$

$$\times \chi_n^\rho \sum_{p=|n-\ell|}^{n+\ell} L_{pn\ell}(\mu_0,\mu_1,\phi)\ Y_{pn\ell}^{\rho j}(r);$$

$$L_{pn\ell}(\mu_0,\mu_1,\phi) = C_{n_0,\ell_0}^{p_0}\left\{C_{n_0,\ell_0}^{p_0} P_n(\mu_0) P_\ell(\mu_1) + \right.$$

$$\left. +2\sum_{m=1}^{\min(n,\ell)} C_{nm,\ell-m}^{p_0} \sqrt{\frac{(n-m)!(\ell-m)!}{(n+m)!(\ell+m)!}} P_n^m(\mu_0) P_\ell^m(\mu_1)\cos m\phi\right\};$$

$$Y_{pn\ell}^{\rho j}(r) = (-1)^{\frac{p-\ell-n}{2}} \alpha_\rho \sum_m A_{\rho j}^m \times$$

$$\times \int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^2 + \left(\frac{\lambda_{\rho j}^m}{\alpha_\rho}\right)^2} j_{p+\frac{1}{2}}(x\alpha_\rho r) F_\ell\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_\rho} x\right) F_n(x),$$

где $j_{p+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ I_{p+\frac{1}{2}}(x)$ – сферическая функция Бесселя; $F_n(x) = \frac{i^{n+1} Q_n\left(\frac{i}{x}\right)}{i Q_0\left(\frac{i}{x}\right)}$.

Значение $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x}$, а при $n > 1$ значение $F_n(x)$ определяется из рекуррентного соотношения $F_{n+1}(x) = \frac{n}{n+1}\ F_{n-1}(x) - \frac{2n+1}{n+1}\frac{F_n(x)}{x}$.

Таким образом, в результате решения многоскоростного уравнения переноса нейтронов получено соотношение (19), устанавливающее связь между искомым функционалом от функции распределения нейтронов от точечного источника при анизотропных индикатрисах источника и детектора с флюенсом рассеянных нейтронов при изотропных индикатрисах, представленным в виде разложения (17). Эта связь установлена в приближении изотропного рассеяния нейтронов на ядрах среды, однако использование в ней данных о распределении флюенса рассеянных нейтронов с изотропными индикатрисами, полученных в детальных численных расчетах с учетом анизотропии рассеяния, позволяет учесть в решении и анизотропию рассеяния нейтронов.

В частном случае односкоростного приближения, когда $A_{\rho j}^m = A_m \delta_{\rho j}$ ($\delta_{\rho j}$ – символ Кронекера), $\alpha_\rho = \alpha_j = \alpha$, $\lambda_{\rho j}^m = \lambda_m$, $\eta_\ell^j = \eta_\ell$, $\chi_n^j = \chi_n$, выражения для прямопролетной и рассеянной составляющих принимают вид

$$\psi_0(r,\mu_0,\mu_1) = \frac{S_0}{r^2}\chi(\mu_0)\eta(\mu_1)e^{-\alpha r};$$

$$\psi_{\text{рас}}(r,\mu_0,\mu_1,\phi) = S_0 \sum_{\ell=0}^L \frac{2\ell+1}{4\pi}\ \eta_\ell \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{4\pi}\ \chi_n \times$$

$$\times \sum_{p=|n-\ell|}^{n+\ell} L_{pn\ell}(\mu_0,\mu_1,\phi) Y_{pn\ell}(r); \quad (20.1)$$

где

$$Y_{pn\ell}(r) = (-1)^{\frac{p-\ell-n}{2}} \alpha \times$$

$$\times \sum_m A_m \int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^2 + \left(\frac{\lambda_m}{\alpha}\right)^2} j_{p+\frac{1}{2}}(x\alpha r) F_\ell(x) F_n(x). \quad (20.2)$$

Выражение для $L_{pn\ell}$ в (20.1) остается прежним, как в (19), поскольку оно не зависит от энергетических характеристик, а определяется лишь угловыми переменными. Следует отметить, что решение (19) в общем случае анизотропных индикатрис представляет суперпозицию функций $L_{pn\ell}(\mu_0,\mu_1,\phi)$ от угловых переменных и функций $Y_{pn\ell}^{\rho j}(r)$, связанных лишь с пространственно-энергетическими переменными.

3. Результаты численных расчетов

Для оценки точности полученного соотношения, определяемого погрешностью расчета рассеяний компоненты $\psi_{\text{рас}}$, так как нерассеянная составляющая вычисляется по точной формуле, было проведено сопоставление результатов одногрупповых расчетов значения $\psi_{\text{рас}}$ по соотношению (20) с результатами численных расчетов, полученных методом Монте-Карло. Определялся функционал $\psi_{\text{рас}}$ для точечного источника единичной мощности в воздушной среде $\left(N_{0,8}O_{0,2}\right)$ плотностью $1{,}29\cdot10^{-3}$ г/см^3 на разных расстояниях от источника. Индикатрисы источника и детектора принимались в виде линейных функций: $\chi(\mu_0)=\frac{1}{4\pi}(1+\mu_0)$; $\eta(\mu_1)=1+\mu_1$.

В этом случае

$$\chi_0=1;\ \chi_1=1/3;\ \eta_0=4\pi;\ \eta_1=\frac{4\pi}{3};$$

$$L_{000}=1;\ L_{101}=\mu_1;\ L_{110}=\mu_0;$$

$$L_{011}=\frac{1}{3}\left[\mu_0\mu_1-\sqrt{(1-\mu_0^2)(1-\mu_1^2)}\right];$$

$$L_{211}=\frac{2}{3}\left[\mu_0\mu_1+\frac{1}{2}\sqrt{(1-\mu_0^2)(1-\mu_1^2)}\cos\phi\right]$$

и функционал $\psi_{\text{рас}}$ по формуле (20) записывается в виде

$$\psi_{\text{рас}}(r,\mu_0,\mu_1,\varphi)=1/4\pi\{Y_{000}(r)+(\mu_0+\mu_1)Y_{101}(r)+$$
$$+\frac{1}{3}\mu_0\mu_1\left[Y_{011}(r)+2Y_{211}(r)\right]+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-\mu_0^2\right)\left(1-\mu_1^2\right)}\times$$
$$\times\cos\varphi\left[Y_{211}(r)-Y_{011}(r)\right]\}. \qquad (21)$$

Рассматривалось распределение нейтронов в энергетической группе 0,5 – 2 МэВ от источника, излучающего нейтроны равномерно по энергии в группе 1,5 – 2 МэВ. Используемые в соотношении (20.2) параметры A_m,λ_m для изотропных индикатрис получены из обработки результатов соответствующего расчета по Монте-Карло, результаты которого для флюенса нейтронов были аппроксимированы формулами

$$4\pi r^2\varphi_0(r)=e^{-0{,}0103r},$$

$$4\pi r^2\varphi_{\text{рас}}(r)=0{,}071e^{-0{,}0081r}-0{,}045e^{-0{,}011r},$$

где r, м; φ, нейтр./м^2.

Отсюда следует, что одногрупповые параметры равны

$$\alpha=0{,}0103\ \text{м}^{-1};\ A_1=0{,}071\ \text{нейтр./м};$$

$$A_2=-0{,}045\ \text{нейтр./м};\ \lambda_1=0{,}0081\ \text{м}^{-1};\ \lambda_2=0{,}011\ \text{м}^{-1}.$$

Сопоставление результатов расчетов рассеянной компоненты $\psi_{\text{рас}}$ для линейно-анизотропных индикатрис по формуле (21) с результатами численных расчетов по Монте-Карло для разных расстояний от источника r и ориентации источника и детектора представлено в табл. 1.

Как видно из табл. 1 наблюдается хорошее согласие результатов расчетов по полученным аналитическим соотношениям с результатами численных расчетов в пределах статистической точности расчетов по Монте-Карло ($1\delta\sim3\div5$ %).

Представляет интерес вопрос о степени "изотропизации" рассеянного излучения по мере увеличения расстояния до источника. Существует мнение, что на большом расстоянии от источника флюенс рассеянных нейтронов становится почти изотропным, поэтому ориентация детектора даже с анизотропной индикатрисой чувствительности не должна сказываться на его показаниях. То есть значение функционала $\psi_{\text{рас}}(r)$ при больших r не зависит от ориентации детектора и совпадает с аналогичной величиной для изотропной индикатрисы чувствительности.

В табл. 2 представлена информация об изменении с расстоянием отношения $\frac{\psi_{\text{рас}}^{\text{ан}}-\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}{\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}$, где $\psi_{\text{рас}}^{\text{ан}}$ – значение функционала для рассеянных нейтронов при линейно-анизотропной индикатрисе детектора, а $\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}$ – значение этого функционала для изотропной индикатрисы чувствительности (нормировка индикатрис в обоих случаях одинакова). Индикатриса источника в обоих случаях является линейно-анизотропной. Расчеты проводились с теми же параметрами A_m,λ_m, что и в предыдущем примере; по формулам для соответствующих ориентаций детектора и источника из соотношения (21) и представленным в табл. 2.

Асимптотические значения интегралов $Y_{pn\ell}(r)$ при $r\to\infty$ получены следующим образом. При больших r сумму по m в выражении (20.2) можно ограничить одним членом с минимальным значением $\lambda=\lambda_1$, так как он определяет флюенс нейтронов на больших расстояниях от источника. Значение λ_1 обычно меньше α, что и определяет более слабое снижение флюенса рассеянных нейтронов по сравнению с прямопролетными.

Подынтегральная функция в (20.2) является четной, поэтому представляя $J_{p+\frac{1}{2}}$ в виде $J_{p+\frac{1}{2}}(x)=$ $=\frac{1}{2}\left[H^{(1)}_{p+\frac{1}{2}}(x)+H^{(2)}_{p+\frac{1}{2}}(x)\right]$, где $H^{(1),(2)}_{p+\frac{1}{2}}(x)$ – цилиндрические функции Ганкеля первого и второго ряда, интеграл

$$L_{pn\ell}(r)=\int_0^\infty dk\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}J_{p+\frac{1}{2}}(kr)(-i)^p\frac{k^2}{k^2+\lambda_1^2}\frac{Q_\ell\left(\frac{\alpha}{ik}\right)Q_n\left(\frac{\alpha}{ik}\right)}{Q_0^2\left(\frac{\alpha}{ik}\right)},$$

входящий в выражения (18) и (20.2), можно записать в виде $L_{pn\ell}(r)=\frac{1}{4}\left[N^{(1)}_{pn\ell}(r)+N^{(2)}_{pn\ell}(r)\right]$,

где

$$N^{(i)}_{pn\ell}(r)=\int_{-\infty}^{\infty}dk(-i)\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}H^{(i)}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\frac{k^2}{k^2+\lambda_1^2}\times$$
$$\times\frac{Q_\ell\left(\frac{\alpha}{ik}\right)Q_n\left(\frac{\alpha}{ik}\right)}{Q_0^2\left(\frac{\alpha}{ik}\right)}.$$

Таблица 1

Сопоставление результатов расчетов функционала $4\pi r^2 \psi_{\text{рас}}(r, \mu_0, \mu_1, \varphi)$ для линейно-анизотропных индикатрис по формуле (21) (верхнее значение) с расчетами по Монте-Карло (нижнее значение)

Ориентация источника и детектора*		Расстояние r, м				
		50	150	300	500	750
$\mu_0 = 1$ $\mu_1 = 1$	U → ← D	1,90 1,82	3,28 3,21	2,45 2,33	0,95 1,00	0,21 0,22
$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = 1$	D ↓ U →	1,45 1,43	2,49 2,48	1,85 1,84	0,71 0,75	0,155 0,16
$\mu_0 = 1$ $\mu_1 = -1$	U → D →	1,00 0,94	1,7 1,67	1,25 1,3	0,47 0,49	0,10 0,11
$\mu_0 = 0$ $\mu_1 = -1$	D ↑ U →	0,69 0,67	1,23 1,26	0,9 0,89	0,35 0,35	0,074 0,074
$\mu_0 = -1$ $\mu_1 = 1$	U ← D ←	1,0 0,97	1,70 1,70	1,25 1,20	0,47 0,47	0,10 0,01
$\mu_0 = -1$ $\mu_1 = -1$	U ← D →	0,38 0,40	0,76 0,77	0,57 0,56	0,22 0,21	0,047 0,042

* Стрелкой указано направление, в котором индикатрисы источника U и детектора D принимают максимальное значение.

Таблица 2

Значение $\frac{\psi_{\text{рас}}^{\text{ан}} - \psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}{\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}$, характеризующее относительное отличие функционалов с линейно-анизотропной и изотропной индикатрисами чувствительности детектора

Ориентация детектора	Расчетная формула	Расстояние r, м					
		50	150	300	500	750	$r \to \infty$
U → ← D	$\frac{2Y_{101} + \frac{1}{3}(Y_{011} + 2Y_{211})}{Y_{000}}$	0,77	0,77	0,79	0,8	0,81	0,77
U → D ↑	$\frac{Y_{101}}{Y_{000}}$	0,36	0,34	0,34	0,345	0,35	0,33
U → D →	$\frac{\frac{1}{3}(Y_{011} + 2Y_{211})}{Y_{000}}$	0,06	0,09	0,1	0,11	0,11	0,11
D → U →	$\frac{\frac{1}{3}(Y_{211} - Y_{011})}{Y_{000}}$	0,1	0,055	0,035	0,03	0,02	13,6/r
D ← U →	$-\frac{\frac{1}{3}(Y_{211} - Y_{011})}{Y_{000}}$	−0,1	−0,055	−0,035	−0,03	−0,02	−13,6/r

Подынтегральная функция $f(k)$ в последнем интеграле удовлетворяет требованиям леммы Жордана в верхней полуплоскости аргумента k для $H^{(1)}_{p+\frac{1}{2}}(k)$ и нижней – для $H^{(2)}_{p+\frac{1}{2}}(k)$ и имеет полюса в точках $k = \pm i\lambda_1$ и точки ветвления $k = \pm i\alpha$. Значение интеграла может быть вычислено методами функций комплексного переменного с помощью вычетов. Интегрируя в верхней полуплоскости по контуру, изображенному на рис. 2, можно представить интеграл в виде

$$N^{(1)}_{pn\ell}(r) = 2\pi r \times \text{вычет}\, f(k)\big|_{k=i\lambda_1} + \oint_c f(k)dk\,.$$

Асимптотическое значение интеграла при больших r определяется первым слагаемым, которое равно

$$N_{pn\ell}^{(1)} \cong 2\sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi r}} K_{p+\frac{1}{2}}(\lambda_1 r) \frac{Q_\ell\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right) Q_n\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)},$$

где $K_{p+\frac{1}{2}}(x)$ – модифицированная функция Ганкеля.

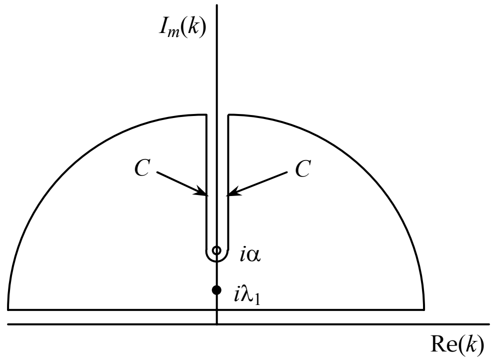

Рис. 2. Контур интегрирования в плоскости комплексной переменной k для вычисления интеграла $N_{pn\ell}^{(1)}(r)$

Интегрирование с функцией $H_{p+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ в нижней полуплоскости приводит к такому же результату. Следовательно, при больших r значение интеграла $Y_{pn\ell}(r)$ в (20.2) стремится к выражению

$$Y_{pn\ell}(r) \cong A_1\sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi r}} K_{p+\frac{1}{2}}(\lambda_1 r) \frac{Q_\ell\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right) Q_n\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}.$$

Следовательно, асимптотические значения отношений при $r \to \infty$ с учетом асимптотик функций $K_{p+\frac{1}{2}}(x)$ будут стремиться к величинам

$$\frac{2Y_{101} + \frac{1}{3}(Y_{011} + 2Y_{211})}{Y_{000}} \to \frac{Q_1\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}\left[2 + \frac{Q_1\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}\right];$$

$$\frac{Y_{101}}{Y_{000}} \to \frac{Q_1\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}; \quad \frac{\frac{1}{3}(Y_{011} + 2Y_{211})}{Y_{000}} \to \frac{Q_1^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)};$$

$$\frac{\frac{1}{3}(Y_{211} - Y_{011})}{Y_{000}} \to \frac{Q_1^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)}{Q_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)} \frac{1}{\lambda_1 r}.$$

Из последних двух пунктов табл. 2 видно, что в рассмотренном частном примере зависимость $\psi_{\text{рас}}(r, \mu_0, \mu_1, \varphi)$ от азимутального угла φ для анизотропной индикатрисы детектора с расстоянием стирается и приближается к изотропному варианту индикатрисы. Однако из первого примера (первые 3 пункта таблицы) видно, что в данном случае зависимость $\psi_{\text{рас}}$ от ориентации анизотропного детектора сохраняется и на больших расстояниях от источника с заметным отличием от случая изотропного детектора по величине.

Не достигается изотропности в угловом распределении нейтронов на больших расстояниях и в случае изотропного источника. Это видно из расчетных данных табл. 3, которые указывают на заметную зависимость асимптотического при $r \to \infty$ отношения $\dfrac{\psi_{\text{рас}}^{\text{ан}} - \psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}{\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}$ от ориентации линейно-анизотропного детектора при изотропном источнике. Аналогичная картина наблюдается при линейно-анизотропном источнике и изотропном детекторе.

Таблица 3

Асимптотические значения величины $\dfrac{\psi_{\text{рас}}^{\text{ан}} - \psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}{\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}$

для изотропного источника и линейно-анизотропного детектора

Ориентация детектора	$U \; \bullet \quad D \; \bullet\!\!\rightarrow$	$U \; \bullet \quad D \; \leftarrow\!\!\bullet$	$U \; \bullet \quad D \; \uparrow$
$\dfrac{\psi_{\text{рас}}^{\text{ан}} - \psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}{\psi_{\text{рас}}^{\text{из}}}$	−0,33	0,33	0

Из рассмотренных примеров следует, что полной изотропности в угловом распределении рассеянных нейтронов на больших расстояниях от источника не достигается. В случае анизотропных индикатрис это приводит к зависимости показаний детектора от ориентации и взаимного расположения детектора и источника даже на большом расстоянии от источника.

Список литературы

1. Дэвидсон. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
2. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
3. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
6. Таблицы присоединенных функций Лежандра. М.: ВЦ АН СССР, 1965.

Статья поступила в редакцию 14.09.2009