УДК 539.1.01

О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ВЕКТОРА ВЕЙЛЯ

М. В. Горбатенко

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Описывается уникальный феномен – возможность установления в определенных областях пространства взаимно-однозначного соответствия между уравнениями, относящимися к совершенно различным физическим явлениям: (1) Явлениям, связанным с вейлевскими степенями свободы в плоском пространстве. (2) Явлениям, описываемым в терминах частиц с полуцелым спином и наблюдаемых величин, соответствующих полной совокупности биспиноров.

Установленный феномен открывает далеко идущие возможности в решении «старого» спорного вопроса – вопроса о физическом смысле вектора Вейля. В работе обсуждается, в частности, возможность отождествления вектора Вейля (с точностью до константы) с вектором плотности тока той совокупности биспиноров, которая образует биспинорную матрицу, входящую в уравнение Дирака. Обсуждаются и другие вопросы.

Введение

Работа относится к одному из фундаментальных направлений современной теоретической физики – установлению физического смысла вейлевских степеней свободы пространства – времени. Проблема возникла в 1918 году, когда Г. Вейль в [1] предложил рассматривать в общей теории относительности не риманово, а более общее пространство. Дополнительные свойства пространства связывались с введенным им вектором (вектором Вейля). Более 90 лет физики и математики выясняют смысл этого вектора. Поискам время от времени сопутствуют фрагментарные успехи, подтверждающие предположение о фундаментальной роли вектора Вейля в физике. Так стали появляться содержательные модели, в которых вейлевские степени свободы связываются с параметрами темной материи и энергии во Вселенной, с космологическим красным смещением, с изменением масштабов для измерения пространственно-временных интервалов [2 – 8]. В некоторых работах [9 – 11] вейлевские степени свободы стали рассматриваться как атрибут интегрируемого пространства Вейля (т. е. пространства, в котором вектор Вейля является градиентом скалярной функции), приводящий к появлению уравнения Шредингера.

Направление исследований, рассматриваемое в данной работе, возникло на стыке двух проблем. Во-первых, из попытки обобщения уравнения общей теории относительности (ОТО) для пустого пространства, чтобы они стали обладать инвариантностью относительно конформных преобразований [12 – 14]. Во-вторых, из решения обратной задачи отображения тензоров на биспиноры в заданной точке [15 – 18]. Новый результат, содержащийся в данной работе, состоит в нахождении уравнений для зависящих от координат полей тензоров, при которых соответствующие им биспинорные поля подчиняются уравнению Дирака. Найденные уравнения, как оказалось, совпадают с уравнениями для вейлевских степеней свободы в плоском пространстве. Полученный результат приводит к неожиданным выводам относительно смысла вектора Вейля, которые сформулированы в конце работы. Обсуждается также возможное использование вейлевской геометрии для построения теории, объединяющей гравитацию с другими видами физических взаимодействий.

Предварительной версией настоящей работы была работа [19]. Здесь результаты [19] излагаются более подробно, в частности, приводится общая формула для калибровочных полей, а также пример точного решения уравнений конформной геометродинамики (КГД) и интерпретации этого решения в терминах биспиноров.

1. Дираковские матрицы. Уравнение Дирака

Для связности изложения и удобства ссылок приводим некоторые свойства дираковских матриц и уравнения Дирака, которые будут использоваться в последующем.

Нас будет интересовать случай, когда пространство можно считать плоским. В этом случае метрический тензор риманова пространства $g_{\alpha\beta}$ можно считать совпадающим с метрическим тензором пространства Минковского, который в декартовых координатах имеет вид $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}[-1,1,1,1]$. Дираковские матрицы (ДМ) γ_α определяются соотношением

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}E. \qquad (1)$$

Символ E в формуле (1) обозначает единичную матрицу 4×4. ДМ γ_α постоянны по всему пространству. В тех случаях, когда потребуется явный вид ДМ, будем использовать майорановскую систему матриц

$$\gamma_0 = -i\rho_2\sigma_1;\ \gamma_1 = \rho_1;\ \gamma_2 = \rho_2\sigma_2;\ \gamma_3 = \rho_3, \qquad (2)$$

элементами которых являются целочисленные вещественные числа[1].

Полагаем, что полевой оператор Z представляет собой в общем случае матрицу 4×4, удовлетворяющую уравнению Дирака

$$\gamma^\nu\left(\nabla_\nu Z\right) = mZ\ . \qquad (3)$$

Матричный оператор Z будем называть биспинорной матрицей. Выделение биспинорных состояний из Z производится путем умножения ее справа на проекторы.

Одновременно с уравнением (3) выполняется и уравнение

$$\left(\nabla_\nu Z^+\right)\gamma^\nu D = -mZ^+D\ . \qquad (4)$$

Появившаяся в (4) матрица D определяется соотношением

$$D\gamma_\mu D^{-1} = -\gamma_\mu^+. \qquad (5)$$

Ковариантные производные от биспинорной матрицы, входящие в соотношения (3), (4), записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\nabla_\alpha Z &= Z_{;\alpha} - Z\Gamma_\alpha;\\ \nabla_\alpha Z^+ &= Z^+{}_{;\alpha} + \Gamma_\alpha Z^+.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Величину Γ_α в (6) будем называть биспинорной связностью[2]. Она представляет собой совокупность вещественных антиэрмитовых матриц

$$\Gamma^*{}_\alpha = \Gamma_\alpha;\ \Gamma^+{}_\alpha = -\Gamma_\alpha. \qquad (7)$$

Приведем некоторые соотношения, непосредственно следующие из уравнения Дирака. Умножаем уравнение (3) слева на γ^α

$$\gamma^\alpha\gamma^\nu\left(\nabla_\nu Z\right) = m\gamma^\alpha Z. \qquad (8)$$

Записываем произведение $\gamma^\alpha\gamma^\nu$ как

$$\gamma^\alpha\gamma^\nu = g^{\alpha\nu} + S^{\alpha\nu} \qquad (9)$$

(здесь $S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\right)$) и (9) подставляем в (8)

$$\left(\nabla_\alpha Z\right) = -S_\alpha{}^\nu\left(\nabla_\nu Z\right) + m\gamma_\alpha Z. \qquad (10)$$

После эрмитова сопряжения (10) и умножения справа на D получаем

$$\left(\nabla_\alpha Z^+\right)D = \left(\nabla_\nu Z^+\right)DS_\alpha{}^\nu - mZ^+D\gamma_\alpha. \qquad (11)$$

2. Отображение тензоров на биспинорную матрицу

Предположим, что в 4-мерном римановом пространстве задана совокупность тензоров пяти типов, перечисленных в табл. 1.

Построим матрицу M по правилу

$$M \equiv aiD^{-1} + bi\gamma_5 D^{-1} + J_\alpha\gamma^\alpha D^{-1} + \\ + s_\alpha i\gamma_5\gamma^\alpha D^{-1} + H_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}D^{-1}\ . \qquad (12)$$

Здесь $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Каждое из слагаемых в правой части (12) представляет собой эрмитову матрицу, так что эрмитовой является и матрица M. Полное число компонент у тензоров, перечисленных в табл. 1, составляет 16.

Таблица 1

Пять типов тензоров

Номер	Тип тензора	Обозначение
1	Скаляр	a
2	Вектор	J^α
3	Антисимметричный тензор	$H^{\alpha\beta}$
4	Псевдовектор	s^α
5	Псевдоскаляр	b

При лоренцевых преобразованиях ДМ $\gamma_\alpha \to \gamma'_\alpha = L\gamma_\alpha L^{-1}$ матрица M преобразуется как $M \to M' = LML^+$, т. е. представляет собой объект типа произведения биспинора на эрмитово сопряженный биспинор.

Если

$$\gamma_\alpha \to \gamma'_\alpha = L\gamma_\alpha L^{-1},\ \text{то}\ M \to M' = LML^+. \qquad (13)$$

Будучи эрмитовой, матрица (12) может иметь любой ранг до четырех включительно. При заданном ранге спектр собственных значений может включать как вещественные (положительные и отрицательные), так и комплексные (комплексно-сопряженные). В данной работе мы ограничимся рассмотрением таких областей пространства-времени, в которых ранг матрицы (12) равен 4 и все ее собственные значения положительны.

Из общей теории матриц известно, что при сделанных предположениях из матрицы M может быть извлечен «корень квадратный», т. е. матрица M может быть представлена как

$$M = ZZ^+. \qquad (14)$$

Если под Z в (14) понимать арифметический корень, то процедура извлечения «корня квадратного» становится однозначной операцией.

Из (12) и (14) следует, что исходные тензоры связаны с Z соотношениями

[1] Среди решений соотношения (1) всегда существует вещественная система ДМ, если используется сигнатура $(-+++)$.

[2] С точностью до постоянного множителя биспинорная связность совпадает с калибровочным полем.

$$
\left.\begin{aligned}
&a=-\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\left(Z^{+}DZ\right);\ b=\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\left(Z^{+}D\gamma_5 Z\right);\ s_{\alpha}=-\frac{i}{4}\mathrm{Sp}\left(Z^{+}D\gamma_5\gamma_{\alpha}Z\right);\\
&J_{\alpha}=\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left(Z^{+}D\gamma_{\alpha}Z\right);\ H_{\alpha\beta}=-\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left(Z^{+}DS_{\alpha\beta}Z\right).
\end{aligned}\right\} \quad (15)
$$

Выполнение условия разрешимости уравнения (14) означает, что

$$\det(Z)\neq 0 \quad (16)$$

и что наряду с матрицей Z существует и матрица Z^{-1}.

В частном случае, когда из всех тензоров, перечисленных в табл. 1 не равны нулю только вектор J^{α} и тензор $H^{\alpha\beta}$, а в качестве системы ДМ используются ДМ в вещественном представлении, для решения задачи об отображении тензоров на биспинорную матрицу достаточно только вещественных чисел. В данной работе нас будет интересовать именно этот частный случай. Полное число компонент у вектора J^{α} и тензора $H^{\alpha\beta}$ равно 10. В этом частном случае эрмитова матрица M имеет вид

$$M=J^{\alpha}\left(\gamma_{\alpha}D^{-1}\right)+H^{\mu\nu}\left(S_{\mu\nu}D^{-1}\right). \quad (17)$$

Все изложенные выше результаты по отображению носят алгебраический характер, поскольку относятся к тензорам и биспинорным матрицам в одной произвольной точке риманова пространства. Ясно, что если поля $J^{\alpha}(x)$, $H^{\alpha\beta}(x)$ заданы в некоторой области пространства и если в каждой точке выполняется условие положительности матрицы $M(x)$, то матрица $Z(x)$ строится в каждой точке и таким образом мы получаем отображение на поле биспинорной матрицы двух тензорных полей: $J^{\alpha}(x)$ и $H^{\alpha\beta}(x)$.

Выше было сказано, что с извлечением «корня квадратного» из M, т. е. с нахождением Z проблем не существует в случае, когда все собственные значения $\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$ матрицы M положительны. Поясним это более подробно. Пусть ψ_A – собственный вектор матрицы M, соответствующий собственному значению μ_A $(A=1,2,3,4)$. По определению векторы ψ_A удовлетворяют соотношению

$$M\psi_A=\psi_A\mu_A. \quad (18)$$

Каждый из векторов ψ_A имеет по четыре компоненты

$$\psi_A=\begin{array}{|c|}\hline \psi_{1A}\\ \hline \psi_{2A}\\ \hline \psi_{3A}\\ \hline \psi_{4A}\\ \hline\end{array}. \quad (19)$$

Поскольку соотношением (18) векторы ψ_A определяются с точностью до умножения на числовой множитель, то векторы ψ_A могут быть нормированы условием

$$|\psi_A|^2=|\psi_{1A}|^2+|\psi_{2A}|^2+|\psi_{3A}|^2+|\psi_{4A}|^2=1. \quad (20)$$

Введем матрицу U, столбцы которой состоят из компонент нормированных векторов ψ_A, т. е. матрицу

$$U=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \psi_{11}&\psi_{12}&\psi_{13}&\psi_{14}\\ \hline \psi_{21}&\psi_{22}&\psi_{23}&\psi_{24}\\ \hline \psi_{31}&\psi_{32}&\psi_{33}&\psi_{34}\\ \hline \psi_{41}&\psi_{42}&\psi_{43}&\psi_{44}\\ \hline\end{array}. \quad (21)$$

Матрица U унитарна, т. е. $U^{+}=U^{-1}$. Введем также четыре проектора P_A:

$$
\left.\begin{aligned}
&P_1=\frac{1}{2}(E+\rho_3)(E+\sigma_3);\ P_2=\frac{1}{2}(E+\rho_3)(E-\sigma_3);\\
&P_3=\frac{1}{2}(E-\rho_3)(E+\sigma_3);\ P_4=\frac{1}{2}(E-\rho_3)(E-\sigma_3).
\end{aligned}\right\} \quad (22)
$$

Система проекторов (22) представляет собой полную систему в том смысле, что $\sum\limits_{A=1,\ldots,4}P_A=E$. Поэтому с помощью проекторов матрица (21) может быть записана как

$$U=\sum_{A=1,\ldots,4}(UP_A). \quad (23)$$

Если с помощью соотношения

$$u_A\equiv UP_A \quad (24)$$

ввести нормированные матричные биспиноры u_A, то уравнение (18) примет вид

$$Mu_A=u_A\mu_A. \quad (25)$$

Теперь через μ_A мы обозначаем не собственные числа (как в случае (18)), а матрицу[3] вида

$$\mu_A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mu_1&&&\\ \hline &\mu_2&&\\ \hline &&\mu_3&\\ \hline &&&\mu_4\\ \hline\end{array}. \quad (26)$$

Просуммировав соотношения (25) по A, получим

$$MU=\sum_{A=1,\ldots,4}(u_A\mu_A)=U\sum_{A=1,\ldots,4}(\mu_A P_A). \quad (27)$$

Умножив (27) справа на U^{-1}, получим

$$M=U\sum_{A=1,\ldots,4}(\mu_A P_A)U^{+}=$$

$$=\left\{U\sum_{A=1,\ldots,4}\left(\sqrt{\mu_A}\ P_A\right)\right\}\left\{U\sum_{A=1,\ldots,4}\left(\sqrt{\mu_A}\ P_A\right)\right\}^{+}=ZZ^{+}. \quad (28)$$

[3] Пустые клетки в матрице означают, что там стоят нули.

То есть получаем соотношение (14), которое и требовалось доказать. Через Z здесь обозначена матрица

$$Z = U\left(\sum_{A=1,\ldots,4}\left(\sqrt{\mu_A}\ P_A\right)\right). \tag{29}$$

В явном матричном виде матрица Z имеет вид

$$Z = U\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{\mu_1} & & & \\ \hline & \sqrt{\mu_2} & & \\ \hline & & \sqrt{\mu_3} & \\ \hline & & & \sqrt{\mu_4} \\ \hline \end{array}. \tag{30}$$

3. Уравнения для вектора и антисимметричного тензора, вытекающие из конформной геометродинамики

Под уравнениями конформной геометродинамики (КГД)[4] будем понимать уравнения ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}, \tag{31}$$

в которых тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ имеет специфическую конструкцию

$$T_{\alpha\beta} = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^\nu{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\alpha;\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}. \tag{32}$$

Здесь A_α – вектор Вейля; λ – лямбда-член, ковариантные производные вычисляются с символами Кристоффеля. Особенность уравнений КГД состоит в том, что они инвариантны относительно конформных преобразований

$$\left.\begin{aligned} &g_{\alpha\beta} \to g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\exp(2\sigma);\\ &A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha - \sigma_{,\alpha};\\ &\lambda \to \lambda' = \lambda\exp(-2\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Здесь $\sigma = \sigma(x)$ – произвольная скалярная функция координат.

Из уравнений (31) следует, что в общем случае должно выполняться соотношение

$$T_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = 0\,. \tag{34}$$

Если ввести антисимметричный тензор

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}, \tag{35}$$

то из соотношения (34) следует соотношение

$$F_\alpha{}^\nu{}_{;\nu} = \lambda_{,\alpha} - 2\lambda A_\alpha. \tag{36}$$

Если в качестве калибровочного условия выбрать, например, условие

$$\lambda = \mathrm{const}, \tag{37}$$

то вектор Вейля будет удовлетворять условию типа условия Лоренца

$$A^\alpha{}_{;\alpha} = 0\,. \tag{38}$$

В КГД так же, как и в ОТО, имеются задачи, в которых эволюция гравитационных степеней свободы и степеней свободы, связанных с материальными полями, должны рассматриваться самосогласованным образом. К числу таких задач относится, например, внутренняя задача Шварцшильда. В то же время, большое количество задач в физике решается в такой постановке, при которой динамика материальных полей рассматривается независимо от гравитационных степеней свободы. В этой постановке пространство является плоским, а динамические уравнения для материальных полей получаются из соотношения (34).

Если следовать постановке задач в плоском пространстве в случае уравнений КГД, то для дополнительных степеней свободы динамические уравнения должны следовать из соотношения (34) при условии, что в качестве тензора энергии-импульса используется тензор (32). Вычислив $T_\alpha{}^\beta{}_{;\beta}$, преобразовав полученное выражение с помощью уравнения (31) и воспользовавшись калибровкой (37), получим следующие четыре уравнения:

$$J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta} = 4mH_{\alpha\beta}; \tag{39}$$

$$H_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = -mJ_\alpha; \tag{40}$$

$$J^\nu{}_{;\nu} = 0; \tag{41}$$

$$m = \mathrm{const}\,. \tag{42}$$

Если исходные уравнения КГД были записаны в терминах вектора Вейля A_α и лямбда-члена λ, то в плоском пространстве уравнения (39)–(42) записаны в новых терминах: $J^\alpha, H^{\alpha\beta}, m$. Связь между величинами зависит от условия калибровки. В нашем случае

$$J_\alpha = \frac{2}{m}A_\alpha; \quad H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2m^2}F_{\alpha\beta}; \tag{43}$$

$$\lambda = 2m^2\,. \tag{44}$$

4. Уравнение Дирака в терминах наблюдаемых величин

Предположим, что поля $J^\alpha(x)$, $H^{\alpha\beta}(x)$ заданы в некоторой области пространства и в каждой точке матрица $M(x)$ может быть отображена на биспинорную матрицу $Z(x)$. Поставим такой вопрос: по какому закону будет изменяться матрица Z, если вектор и антисимметричный тензор, входящие в соотношение (17), подчиняются уравнениям КГД, т. е. уравнениям (39)–(42)?

Ответ на этот вопрос может быть получен по результатам доказательства трех теорем, приводимых ниже.

[4] Дополнительные пояснения к уравнениям КГД см. в [17] и в ссылках, указанных там.

Теорема 1. Теоремой 1 будем называть соотношение

$$J^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0\,. \qquad (45)$$

Докажем, что оно выполняется, если, во-первых, вектор J^{α} выражается через биспинорную матрицу по формуле (15),

$$J^{\alpha} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left(Z^{+}D\gamma^{\alpha}Z\right),$$

и, во-вторых, матрицы Z, Z^{+} удовлетворяют уравнениям Дирака в форме (3) и (4),

$$\gamma^{\nu}\left(\nabla_{\nu}Z\right) = mZ\,,$$

$$\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)\gamma^{\nu}D = -mZ^{+}D\,.$$

Дифференцируем выражение для J^{α}

$$J^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_{\alpha}Z^{+}\right)D\gamma^{\alpha}Z + Z^{+}D\gamma^{\alpha}\left(\nabla_{\alpha}Z\right)\right].$$

Пользуемся уравнением Дирака

$$J^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_{\alpha}Z^{+}\right)D\gamma^{\alpha}Z + Z^{+}D\gamma^{\alpha}\left(\nabla_{\alpha}Z\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left[-mZ^{+}DZ + mZ^{+}DZ\right] = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2. Теорема 2 утверждает, что если биспинорная матрица подчиняется уравнению Дирака (3) и величины J_{α}, $H_{\alpha\beta}$ определены соотношениями (15), то справедливо соотношение

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = 4mH_{\alpha\beta} +$$

$$+E_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\gamma_{5}\gamma^{\mu}Z - Z^{+}D\gamma_{5}\gamma^{\mu}\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right]. \qquad (46)$$

Доказательство теоремы будет проведено в несколько этапов. Сначала попытаемся вычислить величину $\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right)$, используя соотношения (10), (11).

Из (15) следует:

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\alpha}Z^{+}\right)D\gamma_{\beta}Z + Z^{+}D\gamma_{\beta}\left(\nabla_{\alpha}Z\right)\right\} -$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\beta}Z^{+}\right)D\gamma_{\alpha}Z + Z^{+}D\gamma_{\alpha}\left(\nabla_{\beta}Z\right)\right\}. \qquad (47)$$

Пользуемся соотношениями (10), (11)

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)DS_{\alpha}{}^{\nu}\gamma_{\beta}Z -\right.$$

$$-mZ^{+}D\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}Z - Z^{+}D\gamma_{\beta}S_{\alpha}{}^{\nu}\left(\nabla_{\nu}Z\right) + \left.mZ^{+}D\gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}Z\right\} -$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)DS_{\beta}{}^{\nu}\gamma_{\alpha}Z - mZ^{+}D\gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}Z -\right.$$

$$\left.-Z^{+}D\gamma_{\alpha}S_{\beta}{}^{\nu}\left(\nabla_{\nu}Z\right) + mZ^{+}D\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}Z\right\}. \qquad (48)$$

В правой части (48) группируем отдельно члены без производных и с производными

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = \frac{1}{2}m\mathrm{Sp}\left\{-Z^{+}D\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}Z + Z^{+}D\gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}Z\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)DS_{\alpha}{}^{\nu}\gamma_{\beta}Z - Z^{+}D\gamma_{\beta}S_{\alpha}{}^{\nu}\left(\nabla_{\nu}Z\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)DS_{\beta}{}^{\nu}\gamma_{\alpha}Z + Z^{+}D\gamma_{\alpha}S_{\beta}{}^{\nu}\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\}. \qquad (49)$$

Произведения ДМ типа $S_{\alpha}{}^{\nu}\gamma_{\beta}$, $\gamma_{\beta}S_{\alpha}{}^{\nu}$ в (49) заменяем с использованием следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} S_{\alpha}{}^{\nu}\gamma_{\beta} &= -\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\nu} + \delta^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha} + E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\gamma_{5}\gamma^{\mu};\\ \gamma_{\beta}S_{\alpha}{}^{\nu} &= \eta_{\alpha\beta}\gamma^{\nu} - \delta^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha} + E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\gamma_{5}\gamma^{\mu}.\end{aligned}\right\}$$

Получаем

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = -m\mathrm{Sp}\left\{Z^{+}DS_{\alpha\beta}Z\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\left(-\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\nu} + \delta^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha} + E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\gamma_{5}\gamma^{\mu}\right)Z\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{-Z^{+}D\left(\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\nu} - \delta^{\nu}_{\beta}\gamma_{\alpha} + E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\gamma_{5}\gamma^{\mu}\right)\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{-\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\left(-\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\nu} + \delta^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\beta} - E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\gamma_{5}\gamma^{\mu}\right)Z\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{+Z^{+}D\left(\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\nu} - \delta^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\beta} - E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\gamma_{5}\gamma^{\mu}\right)\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\}. \qquad (50)$$

Члены в (50), содержащие метрический тензор, сокращаются. Остальные дают

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = +8mH_{\alpha\beta} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\beta}Z^{+}\right)D\gamma_{\alpha}Z\right\} + E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\gamma_{5}\gamma^{\mu}Z\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{Z^{+}D\gamma_{\alpha}\left(\nabla_{\beta}Z\right)\right\} - E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{Z^{+}D\gamma_{5}\gamma^{\mu}\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{-\left(\nabla_{\alpha}Z^{+}\right)D\gamma_{\beta}Z\right\} + E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\gamma_{5}\gamma^{\mu}Z\right\} -$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{Z^{+}D\gamma_{\beta}\left(\nabla_{\alpha}Z\right)\right\} - E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{Z^{+}D\gamma_{5}\gamma^{\mu}\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\}.$$

Члены, содержащие $D\gamma_{\alpha}$, сводятся к $-\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right)$. Остальные комбинируются в выражение $E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\gamma_{5}\gamma^{\mu}Z - Z^{+}D\gamma_{5}\gamma^{\mu}\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\}$. В результате получаем

$$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = 8mH_{\alpha\beta} - \left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) +$$

$$+E_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta\mu}\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_{\nu}Z^{+}\right)D\gamma_{5}\gamma^{\mu}Z - Z^{+}D\gamma_{5}\gamma^{\mu}\left(\nabla_{\nu}Z\right)\right\}. \qquad (51)$$

После тождественных преобразований соотношения (51) получаем соотношение, совпадающее с (46). Таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема 3. Теорема 3 утверждает, что справедливо соотношение

$$H_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left(M_0\left(\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right)\right) - mJ_\alpha. \tag{52}$$

Доказательство будет состоять в прямой проверке справедливости (52). Имеем

$$H_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\nabla_\nu\left\{Z^+DS_\alpha{}^\nu Z\right\} =$$

$$= -\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_\nu Z^+\right)DS_\alpha{}^\nu Z\right\} - \frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left\{Z^+DS_\alpha{}^\nu\left(\nabla_\nu Z\right)\right\}. \tag{53}$$

Заменяем матрицу $S_\alpha{}^\nu$ в первом случае по формуле

$$S_\alpha{}^\nu = \delta_\alpha^\nu - \gamma^\nu\gamma_\alpha, \tag{54}$$

а во втором случае по формуле

$$S_\alpha{}^\nu = -\delta_\alpha^\nu + \gamma_\alpha\gamma^\nu. \tag{55}$$

Получаем

$$H_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_\nu Z^+\right)D\left(\delta_\alpha^\nu - \gamma^\nu\gamma_\alpha\right)Z\right\} -$$

$$-\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left\{Z^+D\left(-\delta_\alpha^\nu + \gamma_\alpha\gamma^\nu\right)\left(\nabla_\nu Z\right)\right\}. \tag{56}$$

После использования уравнений (3), (4) получаем

$$H_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right\} -$$

$$-m\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left\{Z^+D\gamma_\alpha Z\right\}. \tag{57}$$

Полученное соотношение (57) совпадает с (52). Таким образом, доказано, что из уравнения Дирака действительно следует соотношение (52), т. е. доказана теорема 3.

Результаты доказанных теорем суммированы в табл. 2.

Таблица 2

Соотношения, следующие из уравнения Дирака

Номер теоремы	Что утверждает теорема
1	$J^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0$
2	$\left(J_{\beta,\alpha} - J_{\alpha,\beta}\right) = 4mH_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_\nu Z^+\right)D\gamma_5\gamma^\mu Z - Z^+D\gamma_5\gamma^\mu\left(\nabla_\nu Z\right)\right]$
3	$H_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{8}\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right] - mJ_\alpha$

Обращает на себя внимание тот факт, что если в табл. 2 занулить все шпуровые члены, то соотношения между вектором J^α и тензором $H^{\alpha\beta}$ примут вид, полностью совпадающий с уравнениями (39)–(42). Докажем, что для обращения в нуль шпуровых членов в табл. 3 биспинорную связность необходимо положить равной

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(Z^{-1}Z_{,\alpha}\right) - \left(Z^+{}_{,\alpha}Z^{-1+}\right)\right]. \tag{58}$$

По существу необходимо доказать, что при подстановке выражения (58) в шпуровые члены эти члены обращаются в нуль, т. е. выполняются равенства

$$E_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\mathrm{Sp}\left\{\left(\nabla_\nu Z^+\right)D\gamma_5\gamma^\mu Z - Z^+D\gamma_5\gamma^\mu\left(\nabla_\nu Z\right)\right\} = 0; \tag{59}$$

$$\mathrm{Sp}\left(\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right) = 0. \tag{60}$$

Проверим это на примере одного какого-нибудь из равенств (59)–(60). Например, равенства (60). Пользуемся свойствами шпуров.

$$\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right] =$$

$$= 2\mathrm{Sp}\left[\Gamma_\alpha\left(Z^+DZ\right)\right] + \mathrm{Sp}\left\{M_0\left(Z^+_{,\alpha}DZ - Z^+DZ_{,\alpha}\right)\right\}.$$

Подставляем в это равенство выражение (58)

$$\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Sp}\left[\left(\left(Z^{-1}Z_{,\alpha}\right) - \left(Z^+{}_{,\alpha}Z^{-1+}\right)\right)\left(Z^+DZ\right)\right] +$$

$$+ \mathrm{Sp}\left\{Z^+_{,\alpha}DZ - Z^+DZ_{,\alpha}\right\}.$$

После тождественных преобразований этого соотношения видим, что

$$\mathrm{Sp}\left[\left(\nabla_\alpha Z^+\right)DZ - Z^+D\left(\nabla_\alpha Z\right)\right] = 0,$$

т. е. равенство (60) действительно выполняется, если биспинорная связность определяется по формуле (58). Аналогичным образом доказывается справедливость соотношений (59).

5. Пример точного решения уравнений КГД

5.1. Точное решение

Решение, о котором далее пойдет речь, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} J_0 &= u; \\ J_k &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} H_{0k} &= -\frac{1}{4m}u'\frac{x_k}{r}; \\ H_{mn} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Здесь

$$u = u(r), \tag{62}$$

так что решение является стационарным и сферически-симметричным. Анзатц (61) обеспечивает автоматическое выполнение уравнений (39), (41), (42). Для того чтобы выражения (61) были решением уравнений КГД, необходимо, чтобы удовлетворялись еще уравнения (40). Подставляем выражения (61) в уравнения (40). Оказывается, что уравнения (40) удовлетворяются, если функция *u* является решением уравнения

$$u'' + \frac{2}{r}u' - 4m^2 u = 0\,. \tag{63}$$

Общее решение уравнения (63) состоит из двух слагаемых

$$u = C_1\frac{e^{-2mr}}{mr} + C_2\frac{e^{2mr}}{mr}\,. \tag{64}$$

Каждое слагаемое входит в решение (64) со своей безразмерной константой интегрирования C_1, C_2. Мы будем рассматривать случай, когда $C_1 = 0$. Если константа *m* положительна, то в этом случае решение (64) растет экспоненциальным образом

$$u = -c\frac{e^{2mr}}{mr}\,. \tag{65}$$

В (65) константа C_2 обозначена как $-c$. Подставляем (65) в (61) и получаем

$$\left.\begin{aligned} J_0 &= -c\frac{e^{2mr}}{mr};\\ H_{0k} &= -\frac{c}{4m^2}e^{2mr}\left[\frac{1}{r^2}-\frac{2m}{r}\right]\frac{x_k}{r}. \end{aligned}\right\}. \tag{66}$$

Для получения матрицы *M* подставляем выражения (66) в формулу (17) и ДМ используем в виде (2). Получаем

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -u-\frac{1}{2m}u'\frac{z}{r} & 0 & -\frac{1}{2m}u'\frac{x}{r} & \frac{1}{2m}u'\frac{y}{r} \\ \hline 0 & -u-\frac{1}{2m}u'\frac{z}{r} & -\frac{1}{2m}u'\frac{y}{r} & -\frac{1}{2m}u'\frac{x}{r} \\ \hline -\frac{1}{2m}u'\frac{x}{r} & -\frac{1}{2m}u'\frac{y}{r} & -u+\frac{1}{2m}u'\frac{z}{r} & 0 \\ \hline \frac{1}{2m}u'\frac{y}{r} & -\frac{1}{2m}u'\frac{x}{r} & 0 & -u+\frac{1}{2m}u'\frac{z}{r} \\ \hline \end{array}\,. \tag{67}$$

Собственные значения матрицы *M*:

$$\mu_1 = -u - \frac{1}{2m}u';\quad \mu_2 = -u - \frac{1}{2m}u';$$
$$\mu_3 = -u + \frac{1}{2m}u';\quad \mu_4 = -u + \frac{1}{2m}u'. \tag{68}$$

Подстановка в (68) выражения (65) для *u* дает

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 &= -\frac{ce^{2mr}}{2m^2r^2}[1-4mr];\\ \mu_3 = \mu_4 &= \frac{ce^{2mr}}{2m^2r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Из (69) следует, что условия положительности всех собственных значений состоят, во-первых, из ограничений на константу *c*

$$c > 0\,, \tag{70}$$

во-вторых, из ограничений на область значений радиальной переменной

$$r > 1/4m\,. \tag{71}$$

При нарушении условий (70), (71) некоторые из собственных значений становятся отрицательными.

Нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям (68), обозначим через $\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}}, \xi^{\mathrm{IV}}$. Эти векторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$M\xi^{\mathrm{I}} = \xi^{\mathrm{I}}\mu_{\mathrm{I}},\quad M\xi^{\mathrm{II}} = \xi^{\mathrm{II}}\mu_{\mathrm{II}},$$
$$M\xi^{\mathrm{III}} = \xi^{\mathrm{III}}\mu_{\mathrm{III}},\quad M\xi^{\mathrm{IV}} = \xi^{\mathrm{IV}}\mu_{\mathrm{IV}}\,. \tag{72}$$

Приводим векторы $\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}}, \xi^{\mathrm{IV}}$ в явном виде

$$\xi^{\mathrm{I}} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{-y}{\sqrt{2r(r-z)}} \\ \hline \frac{x}{\sqrt{2r(r-z)}} \\ \hline 0 \\ \hline \frac{\sqrt{(r-z)}}{\sqrt{2r}} \\ \hline \end{array};\quad \xi^{\mathrm{II}} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{x}{\sqrt{2r(r-z)}} \\ \hline \frac{y}{\sqrt{2r(r-z)}} \\ \hline \frac{\sqrt{(r-z)}}{\sqrt{2r}} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array};$$

$$\xi^{\mathrm{III}} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{y}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline \frac{-x}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline 0 \\ \hline \frac{\sqrt{(r+z)}}{\sqrt{2r}} \\ \hline \end{array};\quad \xi^{\mathrm{IV}} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{-x}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline \frac{-y}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline \frac{\sqrt{(r+z)}}{\sqrt{2r}} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}. \tag{73}$$

Составим диагональную матрицу μ, по диагонали которой стоят $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, а также матрицу ξ, столбцы которой составлены из компонент векторов ξ^{I}, ξ^{II}, $\xi^{\mathrm{III}}, \xi^{\mathrm{IV}}$.

$$\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mu_1 & & & \\ \hline & \mu_2 & & \\ \hline & & \mu_3 & \\ \hline & & & \mu_4 \\ \hline \end{array}\,, \tag{74}$$

$$\xi = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{-y}{\sqrt{2r(r-z)}} & \frac{x}{\sqrt{2r(r-z)}} & \frac{y}{\sqrt{2r(r+z)}} & \frac{-x}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline \frac{x}{\sqrt{2r(r-z)}} & \frac{y}{\sqrt{2r(r-z)}} & \frac{-x}{\sqrt{2r(r+z)}} & \frac{-y}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{(r-z)}}{\sqrt{2r}} & 0 & \frac{\sqrt{(r+z)}}{\sqrt{2r}} \\ \hline \frac{\sqrt{(r-z)}}{\sqrt{2r}} & 0 & \frac{\sqrt{(r+z)}}{\sqrt{2r}} & 0 \\ \hline \end{array}\,. \tag{75}$$

Матрица ξ вида (75) является ортогональной. В терминах введенных матриц (74), (75) соотношения (72) запишутся в виде матричного равенства

$$M\xi = \xi\mu . \tag{76}$$

Умножаем (76) справа на ξ^+.

$$M = \xi\mu\xi^+ . \tag{77}$$

Если все собственные значения $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ положительны, то соотношение (77) может быть записано в виде (14), где

$$Z = \xi\sqrt{\mu} , \tag{78}$$

а через $\sqrt{\mu}$ обозначена матрица

$$\sqrt{\mu} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{\mu_1} & & & \\ \hline & \sqrt{\mu_2} & & \\ \hline & & \sqrt{\mu_3} & \\ \hline & & & \sqrt{\mu_4} \\ \hline \end{array} . \tag{79}$$

Выпишем в явном виде биспинорную матрицу Z для рассматриваемого точного решения.

$$Z = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \dfrac{-y\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{2r(r-z)}} & \dfrac{x\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2r(r-z)}} & \dfrac{y\sqrt{\mu_3}}{\sqrt{2r(r+z)}} & \dfrac{-x\sqrt{\mu_4}}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline \dfrac{x\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{2r(r-z)}} & \dfrac{y\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2r(r-z)}} & \dfrac{-x\sqrt{\mu_3}}{\sqrt{2r(r+z)}} & \dfrac{-y\sqrt{\mu_4}}{\sqrt{2r(r+z)}} \\ \hline 0 & \dfrac{\sqrt{(r-z)}}{\sqrt{2r}}\sqrt{\mu_2} & 0 & \dfrac{\sqrt{(r+z)}}{\sqrt{2r}}\sqrt{\mu_4} \\ \hline \dfrac{\sqrt{(r-z)}}{\sqrt{2r}}\sqrt{\mu_1} & 0 & \dfrac{\sqrt{(r+z)}}{\sqrt{2r}}\sqrt{\mu_3} & 0 \\ \hline \end{array} . \tag{80}$$

Исходными матрицами для нахождения биспинорной связности Γ_α по формуле (58) являются формулы (79) для $\sqrt{\mu}$, а также выражение (75) для ортогональной матрицы ξ. Последовательность вычислений Γ_α включает:

(1) Нахождение выражения для ξ^+, исходя из выражения (75) для матрицы ξ.

(2) Нахождение частных производных $\xi^+{}_{,0}$, $\xi^+{}_{,1}$, $\xi^+{}_{,2}$, $\xi^+{}_{,3}$.

(3) Нахождение $\left(\xi^+{}_{,1}\xi\right)$, $\left(\xi^+{}_{,2}\xi\right)$, $\left(\xi^+{}_{,3}\xi\right)$.

(4) Вычисление комбинаций $\sqrt{\mu}\left(\xi^+{}_{,1}\xi\right)\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$, $\sqrt{\mu}\left(\xi^+{}_{,2}\xi\right)\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$, $\sqrt{\mu}\left(\xi^+{}_{,3}\xi\right)\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$ и подстановка их в формулу (58) для Γ_α.

Каждая из перечисленных операций достаточно проста, однако их изложение представляется слишком громоздким. Мы приведем окончательный результат, введя вспомогательную функцию

$$\Omega = \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_3}} + \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}}\right) = \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_4}} + \sqrt{\frac{\mu_4}{\mu_1}}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}} + \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_4}} + \sqrt{\frac{\mu_4}{\mu_2}}\right) = \frac{4mu}{\sqrt{\left(4m^2u^2 - u'^2\right)}} . \tag{81}$$

Компоненты биспинорной связности могут быть записаны в следующем компактном виде

$$\Gamma_0 = 0; \tag{82}$$

$$\Gamma_1 = -\frac{y}{2r(r-z)} i\sigma_2 - \Omega\frac{xz}{4r^2\sqrt{r^2-z^2}} i\rho_2 + + \Omega\frac{y}{4r\sqrt{r^2-z^2}} i\rho_1\sigma_2; \tag{83}$$

$$\Gamma_2 = \frac{x}{2r(r-z)} i\sigma_2 - \Omega\frac{yz}{4r^2\sqrt{r^2-z^2}} i\rho_2 - - \Omega\frac{x}{4r\sqrt{r^2-z^2}} i\rho_1\sigma_2; \tag{84}$$

$$\Gamma_3 = \Omega\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{4r^2} i\rho_2 . \tag{85}$$

Полученные выражения (82)–(85) соответствуют, как и следовало ожидать, группе калибровочных преобразований $SO(4)$.

5.2. Анализ решения

Из (36) следует, что вектор $j_\alpha = \mathrm{const}\left(\lambda_{;\alpha} - 2\lambda A_\alpha\right)$ в самом общем случае удовлетворяет уравнению непрерывности

$$j^\alpha{}_{;\alpha} = 0. \tag{86}$$

В пространственно-временной области, в которой вектор j^α является времениподобным, он может быть представлен в виде

$$j^\alpha \equiv \rho u^\alpha , \tag{87}$$

где u^α – единичный времениподобный вектор. При сигнатуре $(-+++)$

$$u^2 = -1. \tag{88}$$

Появление в схеме времениподобного вектора j^α, удовлетворяющего уравнению непрерывности (86), означает, что схема содержит в себе некоторую строго сохраняющуюся субстанцию, плотность которой ρ определяется, как следует из (87), соотношением $\rho = \sqrt{-\left(j^\alpha j_\alpha\right)}$.

Под сохраняющейся субстанцией будем понимать какой-нибудь заряд, который в теории элементарных частиц считается строго сохраняющимся. Удельный объем V определяется как величина, обратная к ρ

$$V = 1/\rho. \tag{89}$$

С помощью вектора u^{α} могут быть обычным путем построены два оператора проектирования:

$$-u^{\alpha}u^{\beta}; \quad s^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} + u^{\alpha}u^{\beta}. \tag{90}$$

Тензор $T_{\alpha\beta}$ вида (32) может быть представлен в виде

$$T_{\alpha\beta} = Uu_{\alpha}u_{\beta} + \left(u_{\alpha}q_{\beta} + u_{\beta}q_{\alpha}\right) + W_{\alpha\beta}, \tag{91}$$

где величины $U, q_{\alpha}, W_{\alpha\beta}$ определяются соотношениями

$$U \equiv \left(u^{\mu}T_{\mu\nu}u^{\nu}\right); \;\; q_{\alpha} \equiv -s_{\alpha}{}^{\mu}T_{\mu\nu}u^{\nu}; \;\; W_{\alpha\beta} \equiv s_{\alpha}{}^{\mu}s_{\beta}{}^{\nu}T_{\mu\nu}. \tag{92}$$

В последующем будем следовать обычной трактовке величин (92), а именно: U – плотность энергии; q_{α} – вектор плотности потока энергии; $W_{\alpha\beta}$ – тензор напряжений. Обычно тензор $W_{\alpha\beta}$ представляется в виде суммы двух слагаемых

$$W_{\alpha\beta} = Ps_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}, \tag{93}$$

где P – давление, а $\tau_{\alpha\beta}$ – тензор вязких напряжений, удовлетворяющий условию

$$\tau_{\nu}^{\nu} = 0\,. \tag{94}$$

Условие (94) означает, что тензор $\tau_{\alpha\beta}$ не содержит членов со второй вязкостью. При выполнении условия (94) представление (93) однозначно.

Уместно заметить, что трактовка U и P как плотности энергии и давления среды согласуется с трактовкой аналогичных величин в случае тензора энергии-импульса идеальной жидкости, т. е. в случае, когда

$$T_{\alpha\beta} = \left(U + P\right)u_{\alpha}u_{\beta} + Pg_{\alpha\beta}. \tag{95}$$

Величина U определяется при этом по формуле $U \equiv \left(u^{\mu}T_{\mu\nu}u^{\nu}\right)$, а величина P – по формуле

$$P = \frac{1}{3}T_{\alpha\beta}\left(g^{\alpha\beta} + u^{\alpha}u^{\beta}\right) = \frac{1}{3}T_{\alpha\beta}s^{\alpha\beta}. \tag{96}$$

То есть в случае идеальной жидкости формулы для определения U и P совпадают с формулами (92), (93) для этих величин в случае КГД.

Явный вид введенных выше величин $U, q_{\alpha}, W_{\alpha\beta}, P$, $\tau_{\alpha\beta}$ зависит от выбора калибровки. Если в качестве калибровочного условия использовать условие постоянства λ, то автоматически будет выполняться условие Лоренца $A^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0$ и выражения для введенных величин могут быть записаны в ковариантной форме. Эти выражения имеют вид

$$U = -\frac{3}{4}\frac{\rho^2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(u^{\nu}\rho_{;\nu}\right) - \lambda; \tag{97}$$

$$q_{\alpha} = s_{\alpha}{}^{\beta}\left[\frac{V_{;\beta}}{2\lambda V^2} + \frac{1}{2\lambda V}w_{\beta}\right]; \tag{98}$$

$$W_{\alpha\beta} = -\frac{\rho}{2\lambda}\left[u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}\right] - \frac{\rho^2}{4\lambda^2}s_{\alpha\beta} + \lambda s_{\alpha\beta} + $$
$$+\frac{\rho}{2\lambda}\left[u_{\alpha}w_{\beta} + u_{\beta}w_{\alpha}\right]; \tag{99}$$

$$P = \frac{\rho^2}{4\lambda^2} + \lambda + \frac{1}{3\lambda}\left(u^{\nu}\rho_{;\nu}\right); \tag{100}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\rho}{2\lambda}s_{\alpha}{}^{\mu}s_{\beta}{}^{\nu}\left[u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} - \frac{2}{3}s_{\mu\nu}(u^{\sigma}{}_{;\sigma})\right]. \tag{101}$$

Входящий в выражения (98), (99) вектор w_{α} определяется соотношением $w_{\alpha} \equiv u^{\sigma}u_{\alpha;\sigma}$, т. е. является 4-мерным вектором ускорений.

Из (97), (100) следует, что между величинами U, P, V имеется следующая связь:

$$P = \frac{1}{3}U + \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{2\,V^2\lambda^2}. \tag{102}$$

Это соотношение является не чем иным, как уравнением состояния геометродинамической сплошной среды.

Выражение для изэнтропической скорости звука c_s, определяемой как

$$c_s^2 = -V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s, \tag{103}$$

имеет вид

$$c_s^2 = \frac{4}{3}V\left(P - \lambda\right) + \frac{1}{2\lambda^2 V}. \tag{104}$$

Запишем выражения для компонент тензора энергии-импульса, соответствующего решению (66). Полагаем, что входящие в тензор энергии-импульса величины имеют следующую структуру:

$$A_{\alpha} = \left(A_0\left(x, y, z\right), 0, 0, 0\right), \quad \lambda = \text{const}. \tag{105}$$

Получаем

$$\left.\begin{aligned} T_{00} &= -3\left(A_0\right)^2 - \lambda; \\ T_{0k} &= A_{0,k}; \\ T_{mn} &= \delta_{mn}\left[\left(A_0\right)^2 + \lambda\right]. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Заменяем в (106) величины A_{α}, λ на J_{α}, m согласно формулам (43), (44). Произвольную безразмерную константу θ полагаем равной $\theta = 1/2$.

$$A_{\alpha} = m\,J_{\alpha}; \tag{107}$$

$$\lambda = 2m^2. \tag{108}$$

Получаем

$$\left.\begin{aligned} T_{00} &= -3m^2\left(J_0\right)^2 - 2m^2; \\ T_{0k} &= mJ_{0,k}; \\ T_{mn} &= \delta_{mn}\left[m^2\left(J_0\right)^2 + 2m^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Из (109) следуют выражения для плотности энергии U и давления P:

$$U = -3m^2\left(J_0\right)^2 - 2m^2; \tag{110}$$

$$P = m^2\left(J_0\right)^2 + 2m^2. \tag{111}$$

Из (110), (111) следует, что плотность энергии является отрицательной величиной, а давление – положительной:

$$U < 0, \quad P > 0. \tag{112}$$

При этом величины U и P связаны соотношением

$$U = -3P + 4m^2. \tag{113}$$

Сравнивая (113) с (102), видим, что должно выполняться соотношение

$$P = \frac{1}{16\,V^2 m^4} + 2m^2. \tag{114}$$

Подставляя (114) в (113), получаем

$$U = -\frac{3}{16\,V^2 m^4} - 2m^2. \tag{115}$$

Сравнение (115) и (110) дает

$$J^0 = \frac{1}{4\,Vm^3}. \tag{116}$$

Из общей теории следует, что векторы J^α и u^α должны быть коллинеарными, т. е.

$$J^\alpha = \mathrm{const}\,\frac{u^\alpha}{V}. \tag{117}$$

Полагая в (117) индекс $\alpha = 0$ и воспользовавшись выражениями (116) и (66) для J^0, приходим к соотношению

$$\rho = \frac{1}{V} = 4cm^3\,\frac{e^{2mr}}{mr}. \tag{118}$$

Из (118), (115), (114) находим зависимость от радиальной координаты плотности энергии и давления

$$U = -3c^2\,\frac{e^{4mr}}{r^2} - 2m^2; \tag{119}$$

$$P = c^2\,\frac{e^{4mr}}{r^2} + 2m^2. \tag{120}$$

Из (119), (120) следует, что при $r \to \infty$ величины U, P связаны соотношением $U \underset{r\to\infty}{=} -P$.

Теперь найдем выражение для изэнтропической скорости звука c_s. Подставляя в общую формулу (104) выражения (120) и (118) для P и $1/V$, получаем

$$c_s^2 = \frac{11}{6}\,c\,\frac{e^{2mr}}{m^2 r}. \tag{121}$$

Из вида полученной формулы (121) для c_s сразу можно сделать утверждение о том, что изэнтропическая скорость звука стремится к бесконечности при $r \to \infty$. При таком характере зависимости скорость звука должна сравняться со скоростью света на каком-то конечном радиусе $\bar{r}$. Для нахождения $\bar{r}$ необходимо приравнять выражение (121) величине $1/m$ – единственной константе в задаче с размерностью длины

$$\left(m\bar{r}\right)e^{-2m\bar{r}} = \frac{6}{11}c. \tag{122}$$

Ясно, что если

$$c \le 11/12e, \tag{123}$$

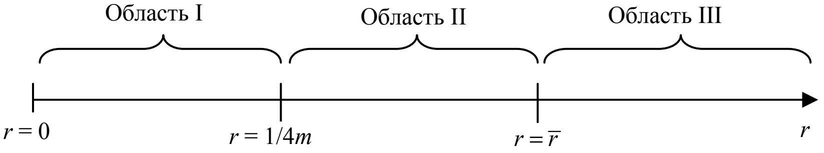
то решение уравнения (122) всегда существует. В других случаях скорость распространения возмущений геометродинамической среды не достигают скорости света.

По-видимому, при эволюционном характере формирования решения в области радиусов вблизи $\bar{r}$ набегающие возмущения перестраивают решение в рамках решений уравнений КГД. Другими словами, $\bar{r}$ – это тот радиус, на котором решение может ветвиться, т. е. одна ветвь решения сменяться другой. Заметим, что в качестве другой ветви решения может подойти решение типа (65), но не с возрастающей экспонентой, а со спадающей.

Таким образом, решение в форме (61) справедливо при всех значениях радиальной переменной $r > 0$. Имеются, однако, два значения радиальной переменной, при которых решение и/или его трактовка претерпевает изменение. Первое значение равно $1/4m$, а второе $\bar{r}$ определяется из уравнения (122). Полное решение включает описание вектора J_α и тензора $H_{\alpha\beta}$ в трех областях, указанных на рисунке.

Область II отличается тем, что если константа интегрирования удовлетворяет неравенству (123), то в ней, т. е. в диапазоне

$$1/4m < r < \bar{r}, \tag{124}$$



Три области, допускающие различные интерпретации решения уравнений КГД выполняется условие положительности поляризационной матрицы плотности M, построенной по формуле (17). Это означает, что в диапазоне (124) решение (61) может трактоваться в терминах состояний биспинорной матрицы Z (80). Поскольку эта матрица является прямой суммой четырех биспиноров, то описание решения в области II может проводиться в терминах четырех частиц со спином ½. Что касается областей I, III то построенная по формуле (17) поляризационная матрица плотности M в этих областях не является положительно определенной. В этих областях трактовка матрицы M требует дополнительного рассмотрения.

Обсуждение результатов

В настоящей работе предложено решение одной из давно обсуждаемых физиками и математиками проблем – проблемы физической интерпретации вейлевских степеней свободы пространства. С точки зрения КГД смысл вектора Вейля зависит от масштаба рассматриваемых явлений. На больших масштабах, т. е. масштабах, на которых в уравнениях (31) нельзя отбрасывать левую часть и пренебрегать таким образом кривизной пространства, вектор Вейля играет роль вектора плотности тока сохраняющегося заряда. КГД не предопределяет тип сохраняющегося заряда, но однозначно указывает на существование такого заряда. Наличие строго сохраняющегося вектора плотности тока позволяет ввести понятие удельного объема и развить феноменологическую термодинамику для геометродинамической сплошной среды.

На масштабах микрочастиц вектор Вейля пропорционален суммарному вектору плотности вероятности всех частиц с полуцелым спином, в терминах которых может быть описана динамика геометродинамической среды. Совпадение уравнений КГД со следствиями уравнения Дирака, которое приведено в табл. 2, является, по нашему мнению, сильным аргументом, подтверждающим жизнеспособность предлагаемой интерпретации.

Следует, однако, иметь в виду, что динамика вейлевских степеней свободы описывается уравнениями (39) – (42) при любой структуре поляризационной матрицы M. Но изложенный вариант квантово-полевой интерпретации решений этих уравнений возможен не всегда, он применим в случаях, когда все собственные значения матрицы M положительны. Это условие соответствует обычным требованиям, предъявляемым к поляризационным матрицам плотности в квантовой механике и квантовой теории поля. По-видимому, подобная интерпретация может оказаться возможной и при нарушении условия положительности матрицы M – это требует отдельного рассмотрения. Результаты данной работы допускают ряд обобщений, например: комплексификацию, введение внутренних пространств, различные ситуации с собственными числами матрицы M и т. д.

В заключение заметим, что изложенные представления о векторе Вейля открывают новые возможности при теоретическом обосновании стандартной модели элементарных частиц, в частности модели конфайнмента.

Список литературы

1. Weyl H. Gravitation und Elektrizitat // Sitzungsber. D. Berl. Akad. 1918. P. 465.
2. Sing J. General relativity. M.: IL 1963, Section VIII.
3. Canuto V., Adams P.J., Hsieh S.-H., Tsiang E. Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications // Physical Review D. 1977. Vol. 16. No 6. P. 1643 – 1663.
4. Fairchaild E. Gauge theory of gravitation // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14. P. 384.
5. Pervushin V., Proscurin D. Conformal General Relativity. Eprint arXiv: gr-qc: 0106006v1.
6. Gorbatenko M. V. Friedmann model in conformally invariant geometrodynamics (in Russian) // Voprosy Atomnoi Nauki I Tekhniki. Series: Theoretical and Applied Physics. 2003. Issue 3. P. 31 – 37.
7. Burlankov D. E. «Dark energy» as Conformal Dynamics of Space. Eprint arXiv: gr-qc: 0610109v1.
8. Filippov A. T. On Einstein-Weyl unified model of dark energy and dark matter. Eprint arXiv: 0812.261v1[gr-qc].
9. Santamato E. Geometric derivation of the Schrödinger equation from classical mechanics in curved Weyl spaces // Physical Review D. 1984. Vol. 29, No 2. P. 216 – 222.
10. Robert Carrol. Remarks on Weyl geometry and quantum mechanics. Eprint arXiv: 0705.3921v3 [gr-qc].
11. Novello M., Salim J. M., Falciano F. T. On a Geometrical Description of Quantum Mechanics. Eprint arXiv: 0901.3741v1[gr-qc].
12. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. 2/2. С. 40 – 46.
13. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. Conformally Invariant Generalization of Einstein Equation and the Causality Principle // General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. 34, No 2. P. 175 – 188.
14. Романов Ю. А. Динамика пространства аффинной связности // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 55 – 57.
15. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. On Correspondence between Tensors and Bispinors // Ninth Marcel Grossmann Proceedings. 2001. P. 933. math-ph/0112048.
16. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. О соответствии между тензорами и биспинорами (Часть I) // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1999. Вып. 3. С. 3 – 18.
17. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. О соответствии между тензорами и биспинорами (Часть II) // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1999. Вып. 3. С. 19 – 36.
18. Gorbatenko M. V. Some Consequences of the Conformally Invariant Generalization of Einstein's Equations // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. 37, No 1. P. 81 – 98.
19. Gorbatenko M. V. Relationship between Conformal Geometrodynamics and Dirac Equations. Eprint arXiv: 0907.4558v1.

Статья поступила в редакцию 06.11.2009