

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ГЛАВНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОГО ШАРА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ ЛЮБЫХ ЕГО ОПТИЧЕСКИХ ТОЛЩИНАХ

Н. Б. Бабичев, П. В. Забусов, И. В. Лутиков, В. П. Незнамов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрен однородный шар, в котором изменение функции распределения нейтронов со временем t подчиняется простому экспоненциальному закону $e^{\lambda t}$, где λ – главное собственное значение кинетического уравнения. Получена формула для λ , которая с достаточно высокой точностью справедлива при любых значениях оптической толщины шара из произвольного вещества.

Введение

В качестве объекта исследований рассмотрим пространственно-однородный шар из произвольного вещества. В работе [1] в случае такой системы получена следующая полуинтерполяционная формула для расчета главного собственного значения (СЗ) односкоростного уравнения переноса нейтронов с изотропным ядром интеграла столкновений:

$$\lambda = \frac{V}{R} (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right], \quad (1)$$

$\alpha = n_{\text{я}}(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c) = n_{\text{я}}\sigma_{\text{tot}}$; $\beta = n_{\text{я}}(v\sigma_f + \sigma_s)$; $h = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность вещества; $n_{\text{я}} = \frac{\rho N_A}{A}$ – плотность ядер с массовым числом A в веществе плотностью ρ ; N_A – число Авогадро; σ_s , σ_f , σ_c и σ_{tot} – элементарные сечения рассеяния, деления, захвата и полное; v – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра; R – радиус шара; V – модуль вектора скорости полета нейтрона \vec{V} .

Отметим, что эволюция функции распределения нейтронов во времени описывается следующим экспоненциальным законом (см. [1]):

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{V}), \quad (2)$$

$\psi(t, \vec{r}, \vec{V})$ – это функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов \vec{r} , \vec{V} в момент времени t в точке наблюдения с радиусом-вектором \vec{r} .

Формула (1) справедлива для шара из произвольного вещества внутри некоторого диапазона изменения оптической толщины $p = \alpha R$

$$0 \leq p \leq p_{\text{max}}(h). \quad (3)$$

Достоинством соотношения (1) является возможность его применения в области малых оптических толщин, включающей в себя даже предельный случай $p \rightarrow 0$.

Ограничение на оптическую толщину сверху является очевидным недостатком выражения (1).

Хотелось бы иметь в распоряжении формулу для λ в случае шара из произвольного вещества, которая справедлива при любых его оптических толщинах. Построение такой формулы является задачей данной работы. Для ее решения имеются следующие соображения. В области больших оптических толщин системы справедлива теория диффузии нейтронов. В случае однородного шара имеется следующая диффузионная формула (см., например, [2]):

$$\lambda = \alpha V \left(\frac{h\omega}{\text{tg } \omega} - 1 \right), \quad \omega = \frac{\pi}{\beta R + z_0}, \quad z_0 = 0,7104. \quad (4)$$

Точность этого соотношения падает по мере уменьшения оптической толщины шара, приводя к абсурду в некоторой области малых оптических толщин.

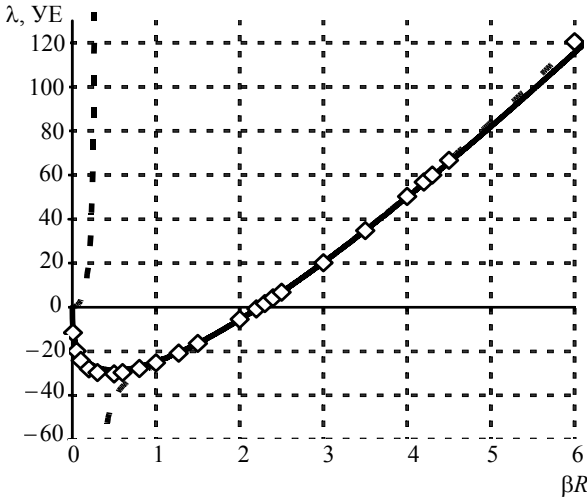
В случае указанных формул, которые с точки зрения областей применимости можно считать противоположными, существует принципиальная возможность их сшивки в некотором промежуточном интервале изменения $p = \alpha R$.

В статье подтверждена возможность сшивки решений на СЗ и на основе этого решена поставленная задача.

1. Изучение вопроса о возможности сшивки двух решений на СЗ

Сравним результаты расчетов λ по формулам (1) и (4) с соответствующими численными решениями задачи на главные СЗ односкоростного кинетического уравнения по математической методике [3].

Результаты вычислений по формулам и численных расчетов по методике [3], выполненных на примере вещества с активностью $h=1,7$, представлены графиками рисунка.



Зависимости $\lambda(\beta R)$ (сплошная и пунктирная линии – результаты вычислений соответственно по формулам (1) и (4), маркеры – значения, рассчитанные по методике [3])

Величины λ рисунка приведены в условных единицах УЕ. Одна УЕ равна 10^7 с^{-1} . Это соответствует следующим принятым нами значениям параметров: скорость нейтронов $V=10^9 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $\frac{N_A}{A} \sigma_{tot} = 0,0133 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$, масса шара $M=3,14 \text{ кг}$ (это значение равно числу π , что приводит к его исчезновению в формуле $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$).

Обсудим полученные результаты. Сначала рассмотрим формулу (1). В пределе $\beta R \rightarrow \infty$ ($p = \alpha R \rightarrow \infty$) она приводит к нефизическому результату. Например, в случае $h > 1$ из выражения (1) следует, что $\lambda(\beta R \rightarrow \infty) = \lambda_\infty \rightarrow -\infty$, однако на самом деле $\lambda_\infty = (h-1)\alpha V > 0$.

Из рисунка видно, что при достаточно больших βR точность формулы (1) падает по мере увеличения βR . Для примера укажем, что относительная погрешность выражения (1) составляет $\approx 1\%$ при значениях $\beta R = 4,2$ ($p = \alpha R \approx 2,47$). В случае $\beta R < 4,2$ и $p = \alpha R < 2,47$ для надкритических состояний шара погрешность формулы (1) меньше одного процента.

Что касается диффузионной формулы (4), то она обладает высокой точностью, если $\beta R \geq 2$ (см. рисунок) и $p = \frac{\beta R}{h} \geq 1,18$. При малых βR выражение (4) неверно. Действительно, в случае $\beta R \approx 0,29$ оно формально приводит к разрыву зависимости $\lambda(\beta R)$ с переходом от $\lambda = -\infty$ к ветви с $\lambda = +\infty$.

В диапазоне $2 \leq \beta R \leq 4$ обе формулы обеспечивают хорошую точность (относительная погрешность в λ менее одного процента), и, как следует из графиков, в этой области имеется точка пересечения. Таким образом, выражения (1) и (4) в указанном интервале можно сшить.

2. Аналитическое выражение для λ в случае шара из произвольного вещества, справедливое при любых значениях его оптической толщины

Рассмотрим шар с произвольной постоянной массой M . Условием сшивки формул служит равенство

$$\frac{V}{R}(\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h}(\beta R)^{0,17} \right] = \alpha V \left(\frac{h\omega}{\text{tg } \omega} - 1 \right), \quad (5)$$

$$\omega = \frac{\pi}{\beta R + 0,7104}.$$

Равенство (5) перепишем с учетом следующих связей:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3; \quad \alpha = \frac{\rho N_A}{A} (\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c);$$

$$\beta = \frac{\rho N_A}{A} (v\sigma_f + \sigma_s); \quad h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}.$$

После несложных преобразований для нахождения абсциссы точки сшивки $(\beta R)_{\text{сшивки}}$ получается следующее трансцендентное уравнение:

$$1,57 - \frac{2}{\beta R} = \frac{(\beta R)^{0,17} \omega}{\text{tg } \omega}, \quad \omega = \frac{\pi}{\beta R + 0,7104}. \quad (6)$$

Численным решением уравнения (6) является

$$(\beta R)_{\text{сшивки}} = 3,4509. \quad (7)$$

Итоговое искомое выражение имеет следующий вид:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{V}{R}(\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h}(\beta R)^{0,17} \right], & \beta R \leq (\beta R)_{\text{сшивки}}; \\ \alpha V \left(\frac{h\omega}{\text{tg } \omega} - 1 \right), \quad \omega = \frac{\pi}{\beta R + 0,7104}, & \beta R \geq (\beta R)_{\text{сшивки}}. \end{cases} \quad (8)$$

Оно справедливо во всем диапазоне изменения произведения $\beta R \in [0; \infty)$ и оптической толщины шара $p = \alpha R \in [0; \infty)$.

Отметим, что в точке сшивки решений (7) относительная погрешность в величине λ меньше 0,2 %.

В приложении показано, что формула (8) соответствует теории подобия [4].

3. Некоторые численные результаты

В таблице для трех значений активности представлены результаты вычисления λ по формуле (8) и соответствующих численных расчетов по математической методике [3].

Значения λ приведены в тех же УЕ, что и на рисунке.

Кроме СЗ, в таблице указаны модули абсолютных погрешностей $\Delta\lambda$ и относительные погрешности $\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$,

где $\Delta\lambda$ – отклонение вычислений по формуле (8) от результата численного расчета, а λ – результат численного расчета.

В области $\beta R < 1$ максимальная относительная погрешность формулы находится на уровне 10 %. В наиболее интересном с практической точки зрения диапазоне $\beta R \geq 2$ относительная погрешность формулы меньше или порядка одного процента.

Из таблицы видно, что по мере уменьшения h абсолютная погрешность $\Delta\lambda$ увеличивается. Эту закономерность подтвердим с помощью оценок.

В работе [4] получена формула, связывающая λ подобных систем с разными ядерно-физическими характеристиками и свойствами. Из этой формулы, приведенной в приложении (см. выражение (П2)), вытекает следующее соотношение для дифференциалов:

$$\Delta\lambda_2 = \frac{h_2\alpha_2}{h_1\alpha_1} \Delta\lambda_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} \Delta\lambda_1. \quad (9)$$

Учтем, что

$$R = \sqrt{\frac{3M}{4\pi} \frac{N_A}{A} \sigma_{tot} \frac{h}{\beta R}}; \quad (10)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3M} \left(\frac{N_A}{A} \sigma_{tot}\right)^{-1} \frac{(\beta R)^3}{h^3}}. \quad (11)$$

Подставляя формулу (11) в выражение (9), при условии постоянства массы M и структуры $\frac{N_A}{A} \sigma_{tot}^*$, получим

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}. \quad (12)$$

Это соотношение хорошо передает тенденцию роста абсолютной погрешности $\Delta\lambda$ при уменьшении активности h (см. таблицу).

Зависимость λ от параметра βR для шара с постоянной массой $M = 3,14$ кг

βR		0,01	0,1	0,5	1	2	4	10
$h = 1,7$	λ (формула (8))	-10,6	-21,4	-28,5	-24,7	-5,60	50,3	294
	λ (методика [3])	-11,6	-24,1	-30,2	-25,2	-5,54	50,3	294
	$ \Delta\lambda $	1,0	2,7	1,7	0,5	0,06	<0,01	<0,01
	$\left \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right $	8,87%	11,2%	5,45%	1,81%	1,18%	<0,1%	<0,1%
$h = 1,0$	λ (формула (8))	-13,8	-28,3	-41,8	-45,3	-44,2	-38,7	-28,9
	λ (методика [3])	-15,1	-31,8	-43,9	-45,9	-44,1	-38,7	-28,9
	$ \Delta\lambda $	1,3	3,5	2,1	0,6	0,09	<0,01	<0,01
	$\left \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right $	8,86%	11,1%	4,88%	1,29%	0,19%	<0,1%	<0,1%
$h = 0,8$	λ (формула (8))	-15,4	-31,9	-49,9	-59,5	-74,4	-114	-312
	λ (методика [3])	-16,9	-35,9	-52,3	-60,1	-74,3	-114	-312
	$ \Delta\lambda $	1,5	4,0	2,4	0,7	0,1	<0,01	<0,01
	$\left \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right $	8,85%	11,0%	4,58%	1,10%	0,13%	<0,1%	<0,1%

* Отметим, что у изотопов ^{238}U , ^{235}U и ^{239}Pu массовые числа и величины σ_{tot} слабо отличаются друг от друга. Приближение $\frac{N_A}{A} \sigma_{tot} = \text{const}$ является достаточно точным, и поэтому оно было принято в расчетах, результаты которых приведены на рисунке и в таблице.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного уравнения переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 3–10.

2. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Особенности односкоростной кинетики нейтронов в оптически толстых однородных системах и решение квазистационарного варианта задачи Милна // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 21–31.

3. Мжачих С. В., Грошев Е. В., Юдинцев В. Ф. О некоторых свойствах $\tilde{D}S_n^y$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2. С. 21–31.

4. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–64.

Приложение

Проверка соответствия итоговой формулы для главных СЗ теории подобия

В работе [4] показано, что в случае справедливости экспоненциального закона (2) и выполнения условия подобия

$$\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1, \quad (\text{П1})$$

где R_1 и R_2 – характерные размеры любых двух однотипных по геометрии однородных систем, соответствующие СЗ связаны формулой

$$\lambda_2 = \alpha_2 V \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right], \quad (\text{П2})$$

которая столь же точна, как и односкоростное кинетическое уравнение, из которого она была получена в [4].

Если приближенные соотношения удовлетворяют точной связи (П2), то это свидетельствует в пользу их

достоверности. Проверим соответствие полученных в разделе 2 результатов теории подобия.

Пусть величина λ_1 подчиняется формуле (8), т. е.

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{V}{R_1} (\beta_1 R_1)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta_1 R_1} - \frac{1}{h_1} (\beta_1 R_1)^{0,17} \right], & \beta_1 R_1 \leq (\beta R)_{\text{сшивки}}; \\ \alpha_1 V \left(\frac{h_1 \omega}{\text{tg } \omega} - 1 \right), & \omega = \frac{\pi}{\beta_1 R_1 + z_0}, \quad \beta_1 R_1 \geq (\beta R)_{\text{сшивки}}, \end{cases} \quad (\text{П3})$$

где $(\beta R)_{\text{сшивки}} = 3,4509$ (см. равенство (9)).

Подставим верхнюю часть выражения (П1) в формулу (П2) и учтем условие подобия (П1). В результате этого имеем

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} + \frac{1,57 h_2}{\beta_2 R_2} (\beta_2 R_2)^{0,83} - \frac{2 h_2}{(\beta_2 R_2)^2} (\beta_2 R_2)^{0,83} - \frac{h_2}{h_1} - 1 \right] \alpha_2 V. \quad (\text{П4})$$

После упрощений формулы (П4) имеем

$$\lambda_2 = \frac{V}{R_2} (\beta_2 R_2)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta_2 R_2} - \frac{1}{h_2} (\beta_2 R_2)^{0,17} \right]. \quad (\text{П5})$$

Это и требовалось доказать.

Аналогичную процедуру теперь проделаем для нижней части выражения (П3), приняв

$$\lambda_1 = \alpha_1 V \left(\frac{h_1 \omega_1}{\text{tg } \omega_1} - 1 \right), \quad \omega_1 = \frac{\pi}{\beta_1 R_1 + 0,7104}. \quad (\text{П6})$$

После подстановки формулы (П6) в соотношение (П2) и использования условия подобия (П1) приходим к следующему результату:

$$\lambda_2 = \alpha_2 V \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right] = \alpha_2 V \left(\frac{h_2 \omega_2}{\text{tg } \omega_2} - 1 \right), \quad (\text{П7})$$

где $\omega_2 = \frac{\pi}{\beta_2 R_2 + 0,7104}$.

Таким образом, доказательство выполнено также и для второй части формулы (8).

Статья поступила в редакцию 06.11.2009