

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ АДИАБАТИЧЕСКОМ СЖАТИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ТОНКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Л. В. Ктиторов

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН

Выведены уравнения, описывающие развитие малых возмущений оболочки, когда ускорение зависит от времени. Предполагается, что оболочка тонкая и не имеет внутренней структуры и масса оболочки много больше массы окружающего оболочку газа. Рассмотрены случаи плоской, цилиндрической и сферической геометрии системы.

Рассмотрена устойчивость движения оболочки, обеспечивающего изэнтропическое сжатие газа, по отношению к развитию малых возмущений вида плоских волн и угловых гармоник.

Показано, что при изэнтропическом сжатии газа рост возмущений оболочки вида плоских волн ограничен как в плоской, так и в цилиндрической геометрии. Рассчитан предельный рост амплитуды таких возмущений. Показано, что рост возмущений вида угловых гармоник неограничен как в цилиндрической, так и в сферической геометрии. Рассчитан инкремент роста таких возмущений.

Выполнены численные расчеты развития возмущений оболочки, изэнтропически сжимающей DT-газ в мишенях тяжелоионного ИТС. Показано, что результаты численного счета находятся в разумном согласии с теоретическими выводами.

Введение

Предложение использовать процесс адиабатического сжатия DT-газа в цилиндрических мишенях тяжелоионного синтеза было сделано ранее, обзор работ приведен в [1]. Поскольку при адиабатическом сжатии газа оболочка движется ускоренно, то на ее внешней поверхности, граничащей с поршнем, реализуются условия для неустойчивости Рэля–Тейлора (РТ). Если считать оболочку тонкой и пренебречь ее внутренней структурой, то задача развития возмущений в оболочке становится однозначно определенной.

Прямое численное моделирование адиабатического сжатия с использованием программ 2D и 3D гидродинамики требует наличия точных решений, которые могут служить тестами при анализе полученных численных решений. В задачах устойчивости, развития возмущений и т. п. такие точные решения, как правило, обеспечивают верхнюю границу значений инкрементов роста возмущений, которые в численных расчетах могут быть достигнуты только как результаты серии расчетов на сходимость. Цель настоящей работы состоит в получении таких точных решений.

Работы, посвященные строгому решению задачи развития возмущений оболочки, адиабатически сжимающей газ, ранее не публиковались. В тех же работах,

в которых рассматривалась устойчивость систем газ – оболочка на стадиях ускорения и торможения оболочки, необходимы были дополнительные предположения: например, о несжимаемости оболочки [2], о распределении плотности газа или о структуре возмущений [3], позволяющей свести задачу устойчивости к проблеме собственных значений. В работе [4] выполнены оценки, показывающие, что при сжатии оболочечных лазерных термоядерных мишеней существует механизм стабилизации неустойчивости, связанный с действием электронной теплопроводности, в результате чего при достаточно малом уровне начальных возмущений сжатие может быть устойчивым. В работе [5] рассмотрена устойчивость безоболочечного изэнтропического сжатия плоского газового слоя.

В настоящей работе мы решаем задачу об устойчивости движения оболочки, обеспечивающей изэнтропическое сжатие газа, по отношению к развитию малых возмущений вида плоских волн и угловых гармоник. При этом делается минимальное количество предположений о свойствах оболочки (она должна быть массивной, однородной и тонкой). Аналогично делается минимальное количество предположений о распределении гидродинамических величин в газе (они единственно должны описываться изэнтропической центрированной волной сжатия). Для решения этой задачи необходимо

знать с высокой точностью функции – зависимости от времени радиуса и ускорения поршня (оболочки), обеспечивающие плоское, цилиндрическое и сферическое изэнтропическое сжатие газа. Такие функции, полученные в одновременно публикуемой статье [6], используются в настоящей работе.

Постановка задачи об устойчивости потребовала вывода уравнений, описывающих развитие возмущений в случае переменного ускорения оболочки. Вследствие этого представляемая работа состоит из двух связанных между собой частей: в первой выводятся уравнения, описывающие развитие возмущений оболочки для случая, когда ускорение зависит от времени, во второй решается задача об устойчивости тонкой массивной оболочки, служащей поршнем при создании изэнтропической волны сжатия.

1. Возмущения тонкой оболочки

Трехмерные уравнения движения тонкой оболочки, движущейся с ускорением, были сформулированы Оттом [7].

В рассматриваемом нами случае малых возмущений такие уравнения могут быть получены непосредственно из законов сохранения.

1.1. Вывод уравнений для возмущений оболочки в плоском случае

Рассмотрим малые возмущения в массивной и тонкой плоской оболочке. Пренебрежем эффектами, связанными с упругостью и вязкостью. Предположим, что масса единицы площади поверхности невозмущенной оболочки постоянна и равна M . Предположим также, что по обе стороны оболочки находится невесомый ($\rho \sim 0$) газ, разность давлений на поверхностях оболочки равна P . Тогда невозмущенная оболочка движется ускоренно и можно записать уравнение движения

$$P = M\ddot{r} = Mg, \quad (1)$$

где r – координата (радиус) в направлении, перпендикулярном плоскости оболочки, а ускорение g является произвольной функцией времени.

Введем на плоскости оболочки систему координат и определим на ней двумерные векторные дифференциальные операции. В невозмущенной оболочке эта система координат является неподвижной и не зависящей от времени.

Обозначим скорость перетекания в плоскости возмущенной оболочки \vec{u} . Естественно предположить, что это движение потенциально, и ввести потенциал скоростей F такой, что $\vec{u} = \text{grad}F$. (Вообще говоря, потенциальность малых колебаний в первоначально неподвижной жидкости можно строго доказать [8].) Обозначим возмущение радиуса оболочки r_1 , возмущение массы M_1 так, что для возмущенных величин \hat{r}, \hat{M} выполняется $\hat{r} = r(t) + r_1(t, x, y)$; $\hat{M} = M + M_1(t, x, y)$.

Заметим, что эйлеровы координаты точек оболочки отличаются от лагранжевых координат (в невозмущенной оболочке) на величины первого порядка малости. Если дифференцировать возмущения, которые сами являются величинами первого порядка малости, по координатам, то результаты дифференцирования по лагранжевым и эйлеровым координатам отличаются между собой на величины второго порядка малости. Поскольку эффектами второго порядка малости ниже мы будем пренебрегать, двумерные системы координат в возмущенной и невозмущенной оболочке мы считаем совпадающими и не зависящими от времени. По этой причине дифференциальные операторы по координатам мы можем считать коммутирующими с операторами дифференцирования по времени. Учитывая это, мы записываем уравнения сохранения массы и двух компонент импульса. Они имеют вид

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = -M \text{div} \vec{u} & \Rightarrow \frac{\dot{M}_1}{M} = -\Delta F; \\ P = (M + M_1)(\ddot{r} + \ddot{r}_1) & \Rightarrow \frac{\dot{M}_1}{M} = -\frac{\ddot{r}_1}{g}; \\ M\dot{\vec{u}} = -P \text{grad} r_1 & \Rightarrow \Delta \dot{F} = -g \Delta r_1. \end{cases} \quad (2)$$

При этом в последнем уравнении системы (2) мы учли искривление оболочки, вычислили дивергенцию от обеих частей уравнения и использовали коммутативность операций дифференцирования по времени и координатам.

Во втором уравнении системы мы использовали условие, что окружающий оболочку газ имеет нулевую плотность. По этой причине в нем отсутствуют возмущения давления – их время релаксации много меньше, чем интересующие нас характерные времена развития возмущений. Кроме того, поскольку оболочка является тонкой, отсутствие возмущений давления вне оболочки обеспечивает их отсутствие внутри оболочки. По этой причине в третьем уравнении системы возмущения давления также отсутствуют.

Далее, система (2) преобразуется к окончательному виду (при этом мы также используем возможность перестановки лапласиана и производной по времени)

$$\frac{1}{g} \left(\frac{1}{g} \ddot{r}_1 \right) + \Delta r_1 = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим условия, при выполнении которых уравнения (2), (3) оказываются справедливыми. Пусть возмущение имеет вид плоской волны с волновым вектором k , толщина оболочки h , плотность окружающего газа ρ , скорость звука в газе c . Тогда рассматриваемые условия заключаются в выполнении неравенства

$$\frac{1}{h} \gg k \gg \frac{\rho}{M}. \quad (4)$$

Действительно, время релаксации возмущений давления в газе по порядку величины равно

$$t_1 \sim \frac{1}{kc} \sim \sqrt{\frac{1}{k^2 c^2}} \sim \sqrt{\frac{\rho}{k^2 P}} \sim \sqrt{\frac{\rho}{k^2 Mg}}.$$

Оно должно быть много меньше характерного времени развития возмущений, которое находим из анализа размерности величин в уравнении (3):

$$t_2 \sim \sqrt{\frac{1}{kg}}. \text{ Тогда условие } t_1 \ll t_2 \text{ приводит к правой}$$

части неравенства (4). С другой стороны, условие $1/h \gg k$ обеспечивает релаксацию всех возмущений в направлении, перпендикулярном плоскости оболочки, а значит, и справедливость уравнений (2).

В случае, когда плотности газа по разные стороны от оболочки различны, неравенству (4) должны удовлетворять оба значения плотности.

1.2. Уравнения для возмущений в сферическом случае

В случае сферической или цилиндрической оболочки соответствующую систему уравнений в криволинейных координатах можно построить на основе уравнений, аналогичных (2), добавив, где это необходимо, соответствующие степени радиуса оболочки r .

Обозначим за M массу единицы телесного угла так, что $Pr^2 = M\dot{r} = Mg$, и введем систему угловых координат на сферической оболочке. Согласно рассуждениям, приведенным выше, операторы дифференцирования по этим координатам коммутируют с оператором дифференцирования по времени. Учитывая это, выделим из стандартных операторов векторного анализа не зависящие от времени части и обозначим их тем же знаком, но с тильдой по схеме: $\nabla \equiv \frac{1}{r}\tilde{\nabla}$, $\Delta \equiv \frac{1}{r^2}\tilde{\Delta}$ (заметим, что градиент и лапласиан с тильдой являются безразмерными). Далее введем потенциал скоростей $\bar{u} = \nabla F = \frac{1}{r}\tilde{\nabla}F$ и построим систему уравнений (5), аналогичную (2). При этом в третьем уравнении системы (5) потребуем сохранения момента импульса вместо сохранения компоненты импульса, касательной к поверхности оболочки. Получим

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = -\frac{M}{r}\tilde{\nabla}\bar{u} & \Rightarrow \frac{\dot{M}_1}{M} = -\frac{1}{r^2}\tilde{\Delta}F; \\ P(r+r_1)^2 = (M+M_1)(\ddot{r}+\ddot{r}_1) & \Rightarrow \frac{M_1}{M} = -\frac{\ddot{r}_1}{g} + 2\frac{\dot{r}_1}{r}; \\ (M\bar{u}\dot{r}) = -Pr^2r\frac{1}{r}\tilde{\nabla}\dot{r}_1 & \Rightarrow (\tilde{\Delta}F) = -g\tilde{\Delta}r_1. \end{cases} \quad (5)$$

Окончательный вид уравнения для возмущений

$$\frac{1}{g}\left(\left(\frac{1}{g}\ddot{r}_1 - \frac{2}{r}\dot{r}_1\right)\dot{r}^2\right) + \tilde{\Delta}r_1 = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что при этом условии применимости уравнений (5) для расчета возмущений оболочки с характерным номером гармоник n записывается анало-

гично неравенству (4) (с учетом того, что размерность величины M изменена)

$$\frac{r}{h} \gg n \gg \frac{\rho r^3}{M}. \quad (7)$$

1.3. Уравнения для возмущений в цилиндрическом случае

Система уравнений для цилиндрической оболочки выводится аналогично случаям, рассмотренным выше. При выводе, однако, следует учитывать одну особенность, связанную с тем, что дифференциальные операторы, действующие вдоль цилиндрической оболочки, по разному коммутируют с оператором дифференцирования по времени. Дифференцирование по углу φ аналогично дифференцированию в сферическом случае:

$$\bar{u} = \frac{1}{r}\tilde{\nabla}F, \text{ дифференцирование вдоль образующей ци-}$$

линдра z , напротив, аналогично плоскому случаю: $\bar{u} = \nabla F$. По этой причине для разных частей оператора Лапласа получаются разные уравнения 4-го порядка, аналогичные соответственно (3) и (6).

Выпишем их, имея в виду, что их вывод почти полностью повторяет соответствующие выводы в плоском и сферическом случаях (здесь M – масса площадки: единица линейного угла \times единица длины цилиндра, так что $Pr = M\dot{r} = Mg$):

Для угловой части оператора Лапласа имеем

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = -\frac{M}{r}\tilde{\nabla}\bar{u} & \Rightarrow \frac{\dot{M}_1}{M} = -\frac{1}{r^2}\tilde{\Delta}F; \\ P(r+r_1) = (M+M_1)(\ddot{r}+\ddot{r}_1) & \Rightarrow \frac{M_1}{M} = -\frac{\ddot{r}_1}{g} + \frac{\dot{r}_1}{r}; \\ (M\bar{u}\dot{r}) = -Pr r\frac{1}{r}\tilde{\nabla}\dot{r}_1 & \Rightarrow (\tilde{\Delta}F) = -g\tilde{\Delta}r_1. \end{cases} \quad (8)$$

Окончательный вид уравнения для возмущений

$$\frac{1}{g}\left(\left(\frac{1}{g}\ddot{r}_1 - \frac{1}{r}\dot{r}_1\right)\dot{r}^2\right) + \frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (9)$$

Для линейной части оператора Лапласа имеем

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = -M\nabla\bar{u} & \Rightarrow \frac{\dot{M}_1}{M} = -\Delta F; \\ P(r+r_1) = (M+M_1)(\ddot{r}+\ddot{r}_1) & \Rightarrow \frac{M_1}{M} = -\frac{\ddot{r}_1}{g} + \frac{\dot{r}_1}{r}; \\ M\dot{\bar{u}} = -Pr\nabla\dot{r}_1 & \Rightarrow \Delta\dot{F} = -g\Delta r_1. \end{cases} \quad (10)$$

Окончательный вид уравнения для возмущений

$$\frac{1}{g}\left(\frac{1}{g}\ddot{r}_1 - \frac{1}{r}\dot{r}_1\right) + \frac{\partial^2 r_1}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

При этом условии применимости этих уравнений определяется неравенствами (12), совпадающими с (4), (7) с точностью до разницы в определении величины M :

$$\frac{r}{h} \gg m \gg \frac{\rho r^2}{M}; \quad (12)$$

$$\frac{1}{h} \gg k \gg \frac{\rho r}{M}.$$

2. Уравнения для возмущений, заданных в виде собственных функций оператора Лапласа

2.1. Плоские волны в плоской геометрии

Пусть возмущение r_1 представляется в виде плоской волны: $r_1 \sim A(t) \exp(ikx)$. Тогда подстановка этого выражения в уравнение (3) приводит его к виду

$$\frac{1}{g} \left(\frac{1}{g} \ddot{r}_1 \right) - k^2 r_1 = 0. \quad (13)$$

Легко видеть, что дифференциальная часть в этом уравнении представляет собой квадрат дифференциального оператора $D \equiv \frac{1}{g} \frac{d^2}{dt^2}$. По этой причине исходное уравнение эквивалентно двум уравнениям 2-го порядка

$$\ddot{r}_1 \pm kgr_1 = 0. \quad (14)$$

При этом два знака перед k в формуле (14) имеют ясный физический смысл. Они отвечают двум поверхностям оболочки, на одной из которых реализуются условия Р–Т неустойчивости, на другой – не реализуются. Так, если ускорение направлено в положительном направлении оси r , то поверхность оболочки с положительной стороны является устойчивой, что приводит к развитию возмущений согласно уравнению (14) со знаком плюс, с противоположной стороны – со знаком минус. Заметим также, что в исходном уравнении (13) два направления ускорения не различаются, а в уравнении (14) знак ускорения оказывается существенным. Это приводит к тому, что независимо от направления ускорения знак плюс в формуле (14) относится к развитию возмущений на «положительной» поверхности оболочки.

2.2. Угловые гармоники в цилиндрической геометрии

Пусть возмущение r_1 представляется в виде частного случая цилиндрической функции: угловой гармоники порядка m $r_1 \sim A(t) \exp(im\varphi)$. Тогда подстановка этого выражения в уравнение (9) приводит его к виду

$$\frac{1}{g} \left(\left(\frac{1}{g} \ddot{r}_1 - \frac{1}{r} \dot{r}_1 \right) \dot{r}_2 \right) - m^2 r_1 = 0. \quad (15)$$

Аналогично предыдущему дифференциальная часть есть квадрат оператора

$$D \equiv \left(\frac{r}{g} \frac{d^2}{dt^2} - 1 \right) \equiv \frac{1}{g} \frac{d}{dt} r^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{r}.$$

По этой причине исходное уравнение эквивалентно двум уравнениям 2-го порядка

$$\ddot{r}_1 + (-1 \pm m) \frac{g}{r} r_1 = 0. \quad (16)$$

Согласно предыдущему рассуждению, выбор знака в уравнении (16) определяется правилом: знак плюс соответствует внешней поверхности оболочки, знак минус – внутренней. То что при этом происходит изменение на единицу номера гармоники m , имеет формальный характер: фактический номер гармоники возмущения остается равным m (как это указано в исходном уравнении (15)). Добавка к нему величины ± 1 означает, что инкремент роста возмущений при ускорении, направленном от центра, всегда несколько больше, чем инкремент таких же возмущений при той же величине ускорения, но при направлении ускорения к центру. Другими словами, инкремент роста возмущений, возникающих на внутренней поверхности оболочки, всегда несколько больше, чем инкремент таких же возмущений при той же величине ускорения, но возникающих на внешней поверхности.

Примером, в котором проявляется такой выбор знака, является «смещение» центра фокусировки – случай, когда уравнения для невозмущенной сходящейся оболочки записываются в системе координат с центром, смещенным на некоторое расстояние относительно истинного. С формальной точки зрения это эквивалентно появлению возмущения с номером гармоники $m = 1$ в движении оболочки с ускорением к центру. Тогда в уравнении (16) имеем $\ddot{r}_1 = 0$ и, согласно уравнению (16), такое возмущение будет сохранять свою амплитуду, что соответствует очевидному результату – смещению центра фокусировки на заданное расстояние.

2.3. Плоские волны в цилиндрической геометрии

Пусть возмущение r_1 представляется в виде другого частного случая цилиндрической функции: плоской волны с волновым вектором k : $r_1 \sim A(t) \exp(ikz)$. Тогда подстановка этого выражения в уравнение (11) приводит его к виду

$$\frac{1}{g} \left(\frac{1}{g} \ddot{r}_1 - \frac{1}{r} \dot{r}_1 \right) - k^2 r_1 = 0. \quad (17)$$

Этот случай не приводит к расщеплению уравнения для возмущений на два.

2.4. Сферические гармоники в сферической геометрии

Пусть возмущение r_1 представляется в виде сферической функции – сферической гармоники порядка (n, l) : $r_1 \sim A(t) P_n^l(\cos \vartheta) \exp(il\varphi)$. Тогда подстановка этого выражения в уравнение (6) приводит его к виду

$$\frac{1}{g} \left(\left(\frac{1}{g} \ddot{r}_1 - \frac{2}{r} \dot{r}_1 \right) r^2 \right) - \left(n(n+1) - \frac{l^2}{\sin^2 \theta} \right) r_1 = 0. \quad (18)$$

Аналогично предыдущему (формулы (15), (16)) данное уравнение сводится к двум уравнениям 2-го порядка. Для $l = 0$ получаем

$$\ddot{r}_1 + \left(-\frac{3}{2} \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \frac{g}{r} r_1 = 0. \quad (19)$$

Выбор знака определяется тем же правилом, что и в уравнении (16): знак плюс соответствует внешней поверхности оболочки, знак минус – внутренней. Кажущееся изменение номера гармоники, как и в соотношении (16), имеет формальный характер.

3. Развитие возмущений оболочки при адиабатическом сжатии газа

Рассмотрим задачу о тонкой оболочке, изэнтропически сжимающей идеальный газ с показателем адиабаты γ , и о развитии возмущений в такой оболочке. Пусть в начальный момент газ покоится и является однородным, начальная плотность равна единице, начальный радиус газа равен единице, начальная скорость звука равна единице (тогда начальное давление равно $1/\gamma$). Примем момент фокусировки за $t = 0$. Тогда в начальный момент $t = -1$. Таким образом, в выбранной системе единиц ускорение измеряется в начальных радиусах оболочки, деленных на квадрат начального времени, длина волны возмущений – в радиусах оболочки.

Характеристики радиального движения оболочки рассчитаны в работе [6], ниже при расчете эволюции возмущений используются результаты работы [6], причем это относится как к автомодельным (точным) решениям, так и к результатам численных расчетов по программе НЗТ [9].

3.1. Плоская геометрия

В плоской геометрии движение оболочки определяется формулой [6]

$$g = \frac{2}{\gamma+1} (-t)^{-\frac{2\gamma}{\gamma+1}}. \quad (20)$$

Подставляя выражение для g в уравнения (13) и решая их методом Рунге–Кутты, получаем зависимости, приведенные на рис. 1.

Из приведенных на рис. 1 зависимостей видно, что амплитуда возмущений растет при фокусировке до конечной величины. Это позволяет ввести понятие о предельном росте амплитуды, который представлен на рис. 2. Во избежание недоразумений заметим, что на всех рисунках начальная (при $t = -1$) амплитуда возмущений полагается равной единице. При этом никак не конкретизируется величина реальной физической амплитуды возмущений, которая является множителем для приведенных на рисунках вели-

чин. Предполагается только, что эта величина достаточно мала, чтобы приближение малых возмущений оставалось справедливым, несмотря на рост амплитуды возмущений.

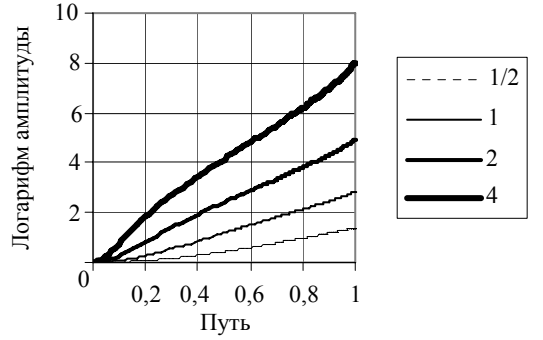


Рис. 1. Рост амплитуды возмущений в процессе движения плоской оболочки от начального радиуса $r = 1$ до центра $r = 0$. Для кривых на рисунке указаны обратные длины волн возмущения.

Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$

Заметим также, что в плоской геометрии решение уравнения (13) может быть записано аналитически. Уравнение (14) при степенной зависимости g от времени сводится к одному из вариантов уравнения Бесселя, в результате растущая при $t \rightarrow 0$ ветвь решения (13) записывается в виде

$$r_1 \sim \sqrt{(-t)} K_{\frac{\gamma+1}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2k(\gamma+1)} (-t)^{\frac{\gamma+1}{2}} \right), \quad (21)$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда. Остальные три ветви решения уравнения (13) получаются из (21) заменой $K_\nu(z)$ на функции $I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$. Численное решение, представленное на рис. 1, выбрано так, что все четыре ветви решения в начальный момент $t = -1$ имеют одинаковую амплитуду.

Для $\gamma = 2$ решение (21) выражается через элементарные функции

$$r_1 \sim (1+z)e^{-z}, \quad (22)$$

где $z = \sqrt{6k} (-t)^{1/3}$.

В результате для $\gamma = 2$ зависимость предельного роста амплитуды от длины волны определяется формулой

$$\ln(r_1(t=0)) - \ln(r_1(t=-1)) \approx z - \ln(4(1+z)), \quad (23)$$

где $z = \sqrt{6k} = \sqrt{12\pi} \frac{1}{\lambda}$.

Представляет интерес сравнение роста амплитуды решения уравнения (13) с классическим выражением [10] для растущей амплитуды возмущений плоской несжимаемой полубесконечной среды

$$A \sim \exp\left(\int \sqrt{kg} dt\right). \quad (24)$$

Подставляя выражение (20) для g в (24), получаем формулу, аналогичную (22)

$$A \sim e^{-z}, \quad (25)$$

где $z = \sqrt{2(\gamma+1)k}(-t)^{\frac{1}{\gamma+1}}$.

Для $\gamma = 2$ эта формула отличается от (22) множителем $(1+z)$. Это означает: при изменении времени от (-1) до нуля рост решений уравнения (3) $r_1(t)$ происходит немного медленнее, чем рост амплитуды $A(t)$, вычисляемой по формуле (24)

$$r_1(t) \sim A(t)(1+z), \quad (26)$$

где $z = \sqrt{6k}(-t)^{1/3}$.

Представляется очевидным, что и при других значениях γ соотношение между r_1 и A остается примерно таким же.

3.2. Цилиндрическая геометрия

В цилиндрической геометрии мы воспользовались рассмотренным в работе [6] численным решением задачи об изэнтропической волне сжатия. Для этой система обыкновенных дифференциальных уравнений в работе [6] решалась методом Рунге–Кутты, запоминался массив значений (примерно 10^5 чисел) $r(t)$, $g(t)$ – и далее эти значения использовались в виде коэффициентов в уравнениях (15), (17), которые, в свою очередь, решались методом Рунге–Кутты. Результаты решения для случая, когда показатель адиабаты газа равен $5/3$, приведены на рис. 2–4.

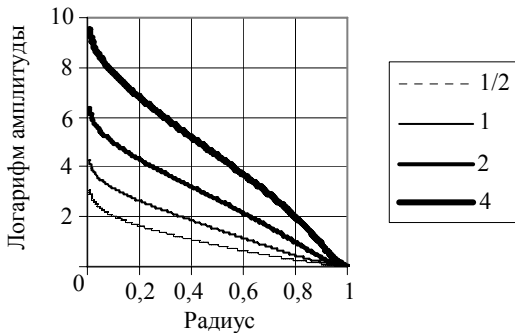


Рис. 2. Рост амплитуды возмущений в процессе движения цилиндрической оболочки от начального радиуса $r = 1$ до центра $r = 0$. Для кривых на рисунке указаны обратные длины волн возмущения. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$

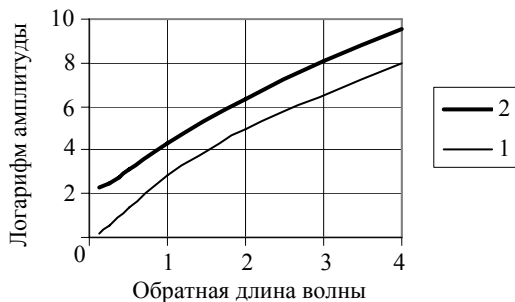


Рис. 3. Предельный рост амплитуды возмущений плоской (1) и цилиндрической (2) оболочек. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$

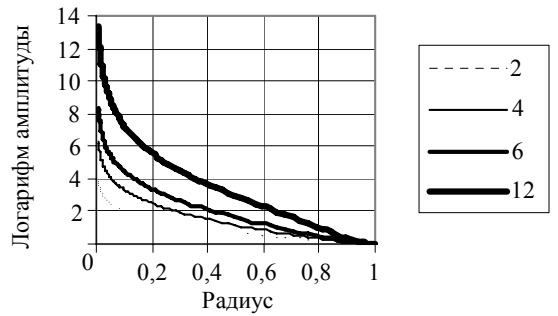


Рис. 4. Рост амплитуды возмущений в процессе движения цилиндрической оболочки от начального радиуса $r = 1$ до центра $r = 0$. Для кривых на рисунке указаны номера угловых гармоник. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$

Аналогично плоскому случаю из рис. 2 видно, что возмущения вида плоских волн до самого момента фокусировки растут до конечной величины. Поэтому, так же как в плоском случае, можно рассчитать значение предельного роста амплитуды. Зависимость такого предельного роста от длины волны возмущения показана на рис. 3. Для сравнения на этом же рисунке приведен результат расчета роста возмущений в плоском случае. Из сравнения видно, что предельная амплитуда возмущений в цилиндрическом случае для основного диапазона длин волн примерно в 7–8 раз выше аналогичных значений в плоском случае.

Возмущения вида угловых гармоник, напротив, неограниченно возрастают в центре. Этот результат становится понятен, если учесть, что в уравнении (17), которое в данном случае имеет вид $\ddot{r}_1 - (m-1)\frac{-g}{r}r_1 = 0$, радиус r вблизи центра асимптотически становится степенной функцией времени с показателем $1/\gamma$, соответственно уравнение принимает вид $\ddot{r}_1 - (m-1)\frac{(\gamma-1)}{\gamma^2 t^2}r_1 = 0$, что приводит к появлению одного неограниченно растущего решения при $t \rightarrow 0$.

3.3. Сферическая геометрия

В сферической геометрии задача решалась аналогично цилиндрическому случаю. Система обыкновенных дифференциальных уравнений из [6] решалась методом Рунге–Кутты, запоминался массив значений $r(t)$, $g(t)$. Далее эти значения использовались в виде коэффициентов в уравнении (18), которое также решалось методом Рунге–Кутты. Результаты решения для случая, когда показатель адиабаты газа равен $5/3$, приведены на рис. 5 (рассмотрены случаи аксиально-симметричных гармоник с $l = 0$).

Возмущения вида сферических гармоник, аналогично цилиндрическому случаю, неограниченно возрастают в центре. Это также является следствием степенной асимптотической зависимости в центре радиуса оболочки от времени.

На рис. 6 показано сравнение между собой амплитуд гармоник в цилиндрическом и сферическом случаях. Видно, что их отличие друг от друга невелико и не имеет принципиального характера. То же сравнение, но для существенного для практических приложений отношения амплитуды к радиусу оболочки, приведено на рис. 7.

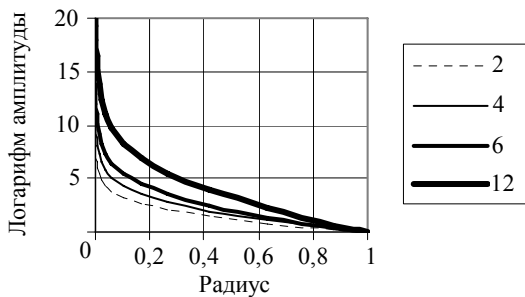


Рис. 5. Рост амплитуды возмущений в процессе движения сферической оболочки от начального радиуса $r = 1$ до центра $r = 0$. Для кривых на рисунке указаны номера сферических гармоник. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$

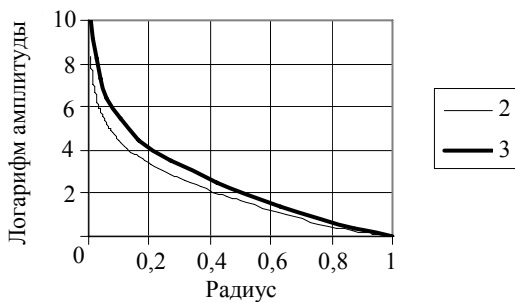


Рис. 6. Рост амплитуды возмущений 6-й гармоники в процессе движения цилиндрической (2) и сферической (3) оболочки от начального радиуса $r = 1$ до центра $r = 0$. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$

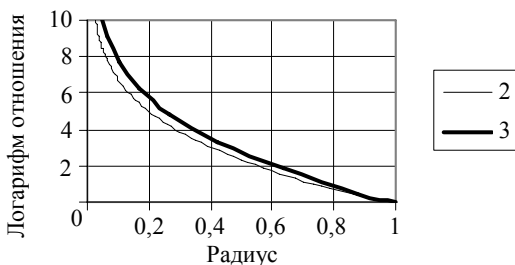


Рис. 7. То же для отношения амплитуды к величине радиуса оболочки (данные рисунка должны быть еще умножены на малую начальную (при $t = -1$) величину отношения)

3.4. Замечание

Заканчивая изложение результатов расчета развития возмущений, необходимо, однако, специально указать, что эти результаты являются решениями задач,

имеющих предельный, идеализированный характер, и в применении к сжатию реальных мишеней должны использоваться с осторожностью. Например, изэнтропическое сжатие цилиндрических мишеней для тяжелоионного ИТС [1, 6] потребует использования автоматических функций, найденных в п. 1.5, но только до определенного момента времени, поскольку для целей ИТС требуются сжатия DT-газа только до конечных, хотя и больших ($\sim 100 \text{ г/см}^3$) значений плотности. После этого момента времени энерговыделение прекращается и оболочка, которая сжимает газ, движется в значительной степени по инерции. Соответственно и малые возмущения оболочки в такой системе будут развиваться согласно зависимостям, представленным на рис. 7, только до определенного радиуса (соответствующего моменту прекращения энерговыделения), а затем их рост должен резко замедлиться. По этой причине большая часть диапазона величин радиуса, для которых рассчитаны кривые на рис. 1–7, не имеет применения в реальных мишенях. На рисунках, однако, кривые продлены до нуля (и выше в тексте исследовано их поведение в нуле) просто для полноты описания полученных решений.

Аналогичное замечание может быть сделано относительно сжатия сферических мишеней.

Заметим также, что вопрос о нарушении применимости полученных решений вблизи нуля из-за того, что возмущения перестают быть малыми в рассматриваемых мишенях, не требует специального анализа, так как неприменимость решений из-за смены режима движения оболочки наступает гораздо раньше.

3.5. Численные расчеты роста возмущений при адиабатическом сжатии газа

Ниже приведены результаты численных расчетов развития возмущений в мишени тяжелоионного ИТС. Расчеты выполнялись с использованием двумерной программы НЗТ [9]. Детали расчетов, геометрия мишени приведены в работе [6] (начальный радиус оболочки равнялся 20). Начальные синусоидальные возмущения были заданы на внешней поверхности оболочки с длиной волны 10 и 20. Начальная амплитуда возмущений была равна 0,01.

Движение оболочки было таким же, как в работе [6]. Были рассчитаны два варианта сжатия мишени: в приближении тонкой оболочки (когда уравнение состояния оболочки совпадало с идеальным газом, что приводило к сжатию оболочки до очень больших плотностей) и с реальным уравнением состояния оболочки типа трехчлена. Результаты обоих вариантов расчетов приведены на рис. 8, 9. Видно, что расчеты, сделанные в приближении тонкой оболочки, относительно хорошо согласуются с теоретическими кривыми. При этом, однако, следует учесть сделанное выше замечание о том, что численный расчет следует теоретической кривой не до фокусировки, а только до точки прекращения энерговыделения (примерно до половины радиуса).

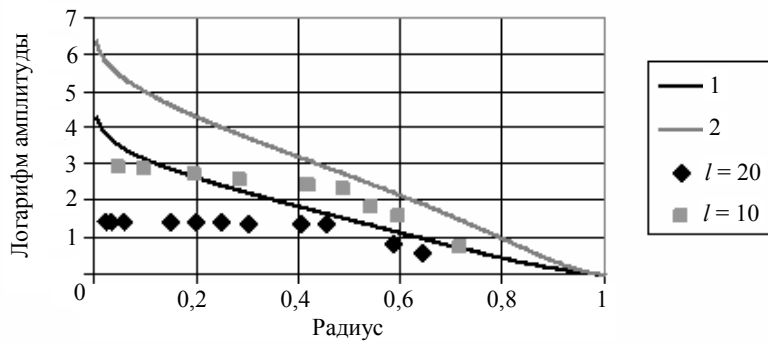


Рис. 8. Сравнение теоретических и численных расчетов роста амплитуды возмущений. Линии соответствуют точным решениям, представленным на рис. 12. Серые квадраты – численные расчеты мишени с возмущениями с длиной волны $\lambda = 10$, черные – $\lambda = 20$

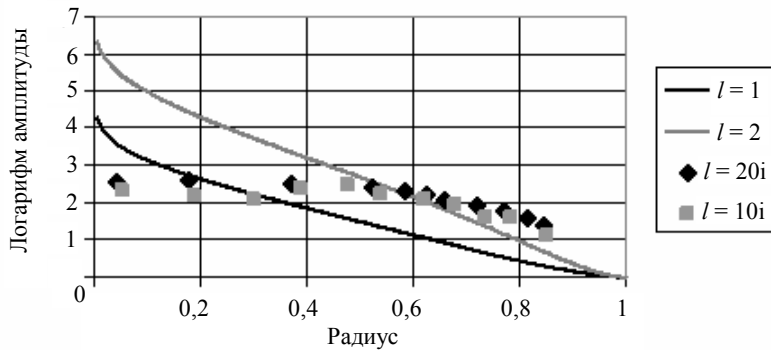


Рис. 9. Сравнение теоретических и численных расчетов роста амплитуды возмущений. Линии соответствуют точным решениям, представленным на рис. 12. Серые квадраты – численные расчеты мишени с возмущениями с длиной волны $\lambda = 10$, черные – $\lambda = 20$. Рассматривается рост возмущений на внутренней поверхности толстой оболочки

Результаты расчетов, выполненных с учетом толщины оболочки, значительно сильнее отклоняются от теоретических кривых, рассчитанных в настоящей работе, причем рост амплитуды в численных расчетах происходит значительно быстрее, чем в теории.

Заключение

Выведены уравнения, описывающие развитие малых возмущений оболочки, движущейся с ускорением, когда ускорение зависит от времени. Предполагается, что оболочка тонкая и не имеет внутренней структуры и масса оболочки много больше массы окружающего оболочку газа. Рассмотрены случаи плоской, цилиндрической и сферической геометрии системы.

Рассмотрена устойчивость движения оболочки, обеспечивающего изэнтропическое сжатие газа, по отношению к развитию малых возмущений вида плоских волн и угловых гармоник. Показано, что рост возмущений вида плоских волн ограничен как в плоской, так и в цилиндрической геометрии. Рассчитан предельный рост амплитуды таких возмущений. Показано, что рост возмущений вида угловых гармоник неограничен как в ци-

линдрической, так и в сферической геометрии. Рассчитан инкремент роста таких возмущений.

Сравнение полученных инкрементов роста амплитуды возмущений оболочки с аналогичными выражениями, известными из теории РТ-неустойчивости в несжимаемой жидкости, показывает, что возмущения оболочки при фокусировке растут немного медленнее, чем в несжимаемой жидкости.

Выполнены численные расчеты развития возмущений оболочки, изэнтропически сжимающей ДТ-газ в мишенях тяжелоионного ИТС. Показано, что результаты численного счета находятся в разумном согласии с теоретическими выводами.

Список литературы

1. Баско М. М., Гуськов С. Ю., Недосеев С. Л., Чуразов М. Д. Мишени ИТС // Ядерный синтез с инерционным удержанием / Под ред. Б. Ю. Шаркова. М.: Физматлит, 2005. С. 53–56.
2. Лебо И. С., Тишкин В. Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза. М.: Физматлит, 2006.

3. Gupta N. K., Lawande et al. Rayleigh-Taylor instability in multi-structured spherical targets // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 1986. Vol. 28. P. 925–941.
4. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Розанов В. Б. Симметрия и устойчивость сжатия лазерных термоядерных мишеней // *Письма в ЖЭТФ*. 1972. Т. 12. Вып. 3. С. 36.
5. Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Розанов В. Б. Ускорение, сжатие и устойчивость плоского слоя вещества под действием излучения лазера // *ПММ*. 1975. Т. 39. С. 451–457.
6. Ктиторов Л. В. Оптимизация сжатия газа в мишенях инерциального термоядерного синтеза на основе точного решения задачи об автомодельной волне сжатия // *ВАНТ*. См. настоящий вып. С. 25–33.
7. Ott E. // *Phys. Rev. Lett.* 1972. Vol. 29. P. 1429.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Том 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
9. Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трех-температурном приближении в областях сложной формы с подвижными границами // *Отчет ИПМ им. Келдыша РАН*, 2004.
10. Geoffrey Taylor. The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes // *Proc. Roy. Soc.* 1950. Ser. A. Vol. 201. P. 192 – 194.

Статья поступила в редакцию 17.11.2009