

## ОБ ЭФФЕКТЕ СХЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ В *LES* РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

М. С. Попов<sup>1</sup>, В. П. Стаценко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саровский инженерный центр, пос. Сатис

<sup>2</sup>ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлен анализ эффектов схемной вязкости по результатам расчетов с помощью выполненного в *STAR-CD* численного *LES* моделирования турбулентного течения в плоском канале. Постановка расчетов аналогична постановке в известной работе по *DNS* моделированию такого течения.

### Введение

Мы будем вести здесь речь лишь о течении в плоском канале, поскольку именно для него (в силу дешевизны соответствующих расчетов) выполнено большое число вариантов расчетов. Выводы, сделанные для этого случая, полагаем справедливыми и для более сложных, но принципиально не отличающихся течений, например турбулентных течений в связке стержней. Моделирование такого течения также очень полезно для выбора наилучшей комбинации входных параметров (таких, как разностные схемы, значение временного шага, способа иницирования турбулентности и т. д.), так как оно требует много меньше времени для того, чтобы определить, подходит ли данный параметр для *LES* моделирования ограниченного стенками потока с периодичными границами в *STAR-CD*.

В задачах подобного рода наиболее трудной проблемой является выбор подходящей счетной сетки, поскольку помимо явно учитываемой молекулярной вязкости (с кинематическим коэффициентом  $\nu$ ) и также явно учитываемой подсеточной вязкости, коэффициент  $\nu_{SGS}$  которой зависит от размера счетной ячейки  $\Delta$ :  $\nu_{SGS} \sim \Delta^2$ , неявно работает еще и схемная вязкость (коэффициент  $\nu_{sc}$ ). Так для краткости мы называем эффект численных ошибок. Численные ошибки делятся на конечно-разностную ошибку аппроксимации производных и ошибку дискретизации при вычислении нелинейного члена уравнений Навье–Стокса. По-видимому, впервые проблема соотношения численных ошибок и величины подсеточных напряжений была рассмотрена в работе [1]. В этой работе рассматривается задача об изотропной турбулентности в «ящике» с периодическими граничными условиями. Однако из-за упрощения задачи полученная в этой работе оценка спектра мощ-

ности ошибок не имеет очевидной связи с величиной эффективного коэффициента схемной вязкости, влияющей на практически важный конечный результат, а именно профили скорости в каналах.

Один из прямых способов получить количественную информацию об эффективном коэффициенте схемной вязкости из численного эксперимента изложен ниже. Приведены его оценки и сравнение с величиной коэффициента подсеточной вязкости для простейшего течения в плоском канале.

### 1. Постановка задачи о течении в плоском канале

На рис. 1 представлено двумерное сечение канала с направлением течения и размерами канала.

Размеры канала: в направлении  $x - 2\pi$  м, в направлении  $y - 2$  м, в направлении  $z - \pi$  м. Начало координат расположено в центре канала между двумя стенками канала, ее положение в плоскости  $YZ$  указано на рис. 1.

Для всех расчетов использовалась структурированная неравномерная сетка с различным разрешением (см. таблицу). На рис. 2 показана зависимость шага  $dy$  счетной сетки по  $Y$  от номера  $N$  узла начиная от стенки.

Граничные условия для всех расчетов следующие. На стенках канала ( $y = 1; y = -1$ ) задавались условия прилипания. В направлении  $z$  использовались общие циклические границы (полностью периодические по  $z$  условия). В направлении течения ( $x$ ) использовались частичные циклические границы (периодичность по  $x$  скорости, но с заданием перепада давления (*P-DROP* по терминологии *STAR-CD*)). Эти граничные условия в точности соответствуют условиям, использованным при *DNS* течения в плоском канале [2].

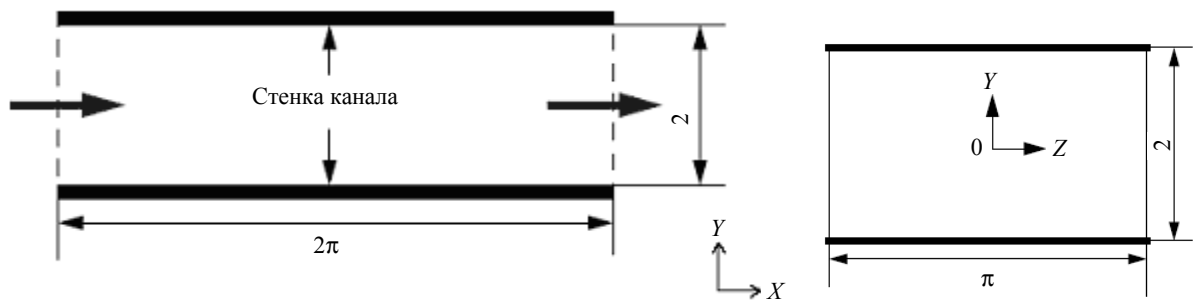


Рис. 1. Двумерное сечение модели канала в плоскости  $XY$  (слева) и  $YZ$  (справа) общей системы координат

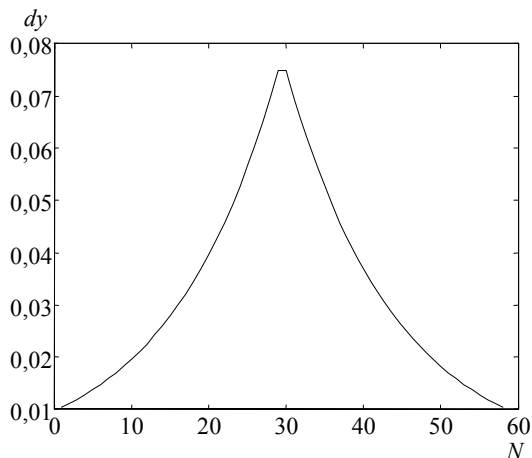


Рис. 2. Зависимость шага счетной сетки от номера узла

Физические свойства жидкости принимались следующими: плотность  $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$  и вязкость  $\mu = 1/\text{Re}_\tau \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ . Мы использовали  $p = 2\pi \text{ Н/м}^2$  в качестве значения перепада давления в направлении течения (для моделирования частичных циклических граничных условий). Расчеты проводились при значении числа Рейнольдса (на основе динамической скорости  $u_\tau$ )  $\text{Re}_\tau = 180$ . Константа Смагоринского в выражении для вихревой подсеточной вязкости  $\nu_{SGS} = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|$ :  $C_S = 0,065$ . Другие основные параметры, которые изменялись для разных моделирований: разрешение сетки, разностные схемы, значение шага по времени. Некоторые из параметров для рассчитанных вариантов представлены в таблице.

В таблице использованы следующие обозначения:  $N_x$ ,  $N_y$  и  $N_z$  – количество ячеек в направлениях  $X$  (направление потока),  $Y$  (перпендикулярное к стенке) и

$Z$  (продольное) соответственно. Колонка разностных схем содержит информацию об использованной временной и пространственной дискретизации в форме временная схема + пространственная схема. Аббревиатурой  $C-N$  обозначена схема Кранка–Николсона,  $CD$  означает центральную разность, а  $MARS$  – аббревиатура схемы монотонной адвекции и реконструкции.

Далее рассматриваются два способа задания начальных данных в указанных вариантах. Первый способ состоит в задании усредненного профиля продольной компоненты скорости при нулевых поперечных. Это дает возможность оценить схемную вязкость для регулярных профилей скорости. Мы предполагаем, что она должна быть второго порядка аппроксимации, как и используемая численная схема. Второй способ состоит в задании мгновенного профиля продольной компоненты скорости при нулевых поперечных. Это дает возможность оценить схемную вязкость для нерегулярных профилей скорости. Мы предполагаем, что она должна быть первого порядка аппроксимации, независимо от используемого в численной схеме.

#### Параметры, использованные для расчетов

Номер варианта	$N_x \times N_y \times N_z$	Разностные схемы	Шаг по времени ( $DT$ ), с
1	$30 \times 60 \times 50$	$C-N + MARS$	0,0025
2	$50 \times 60 \times 50$	$C-N + MARS$	0,0025
3	$30 \times 60 \times 50$	<i>Semi-Implicit Euler + CD</i>	0,000125
4	$50 \times 60 \times 50$	<i>Semi-Implicit Euler + CD</i>	0,000125

## 2. Способ получения количественной оценки коэффициента схемной вязкости из численного эксперимента

Пусть отключены все пульсации – задаем лишь  $u \equiv \frac{dx}{dt}$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( (v + v_{sc}^{(xy)}) \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Шаг по времени выбираем предельно малым:  $dt \lesssim 10^{-4}$ , чтобы не учитывать схемные эффекты, возникающие из-за погрешностей аппроксимации по времени. Последние могут быть оценены в расчете с большим шагом (способ будет изложен ниже). Рассмотрим простейший случай

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, v = 0. \quad (2)$$

Итак, имеем несколько ( $n$ ) моментов времени, соответственно ( $n - 1$ ) значений  $D_{n-1}^{(u)} \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n-1}$ . Предполагаем, что на интервале  $0 \leq y \leq 1$  скорость монотонно возрастает (что справедливо, как правило, для среднего профиля скорости), при  $y = 1$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . Тогда с учетом (2) из (1) следует

$$v_{sc}^{(xy)}(y) = \int_1^y D_{n-1}^{(u)}(y) dy \left/ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right., \quad (3)$$

$$dy = (y_{i+1} - y_i); \quad y = (y_{i+1} + y_i)/2.$$

Для проверки точности наших оценок рассмотрим теперь расчет с  $v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} = 0,55556 \cdot 10^{-2}$ . Аналогично предыдущему делаем  $n$  шагов по времени, получаем значения  $D_{n-1}^{(u)} \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n-1}$  и далее

$$v_{sc}^{(xy)}(y) + v = \int_1^y D_{n-1}^{(u)}(y) dy \left/ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right., \quad (4)$$

так что разность (4) и (3) должна быть близка к заданному  $v$ .

Можно также сравнить (3) с оценкой погрешности для схемы 2-го порядка по  $y$ , справедливой в приближении постоянства по  $y$  шага  $dy$  и градиента  $\frac{\partial u}{\partial y}$ :

$$\tilde{v}_{sc}^{(xy)}(y) = c_{sc} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| dy^2. \quad (5)$$

Далее полагаем  $c_{sc} \approx 1$ . Полученная таким образом оценка для  $\tilde{v}_{sc}$  является минимальной, поскольку в об-

щем случае, когда  $u$  зависит не только от  $y$ , но также от  $x$  и  $z$ , в правой части (1) имеются также слагаемые типа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v_{sc}^{(xx)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{sc}^{(xz)} \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Можно также сравнить (4) с оценкой для схемы третьего порядка по  $y$ , также справедливой в приближении постоянства по  $y$  шага  $dy$  и второй производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\tilde{v}_{sc}^{(3)}(y) = c_{sc}^{(3)} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^3 \right|. \quad (7)$$

Оценка, исходящая из предположения, что схема имеет первый порядок аппроксимации

$$v_{sc} = u dy/4, \quad (8)$$

лишь формально напоминает теоретическую оценку [3] схемной вязкости (по [3] мы имели бы в (8) величину  $v \equiv \frac{dy}{dt}$  вместо  $u$ ). Тем не менее, как будет видно далее, оценка (8) схемной вязкости в целом соответствует численным результатам, а также близка к следующей оценке, учитывающей неоднородность счетной сетки (см. рис. 2) и также содержащей слагаемое первого порядка:

$$\tilde{v}_{sc}^{(xy)}(y) \approx \left| \frac{\partial (udy^2)}{\partial y} \right| = \left| 2udy \frac{\partial dy}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| dy^2. \quad (9)$$

На однородной счетной сетке (9) переходит в (5).

## 3. Результаты расчетов с начальным профилем продольной компоненты скорости, равным среднему по времени профилю, нулевыми поперечными компонентами скорости и нулевым градиентом давления – шаг по времени $dt = 10^{-5}$

Результаты расчетов для варианта 2 по формулам (3), (4) приведены на рис. 3,а (здесь и далее результаты приводятся для значений  $Y$  от стенки до середины канала, учитывая симметрию задачи).

Как видно, кривая  $v_{sc}^{(v)} - v$ , где  $v_{sc}^{(v)}$  – коэффициент схемной вязкости в расчете с молекулярной вязкостью  $v = 0,55556 \cdot 10^{-2}$ , близка к кривой  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с нулевой молекулярной вязкостью. Это говорит о достаточной точности оценки коэффициента схемной вязкости по формулам (3), (4). Наибольшее расхождение наблюдается в центре канала, где  $\frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$ . Такой же результат получен для всех расчетов данного раздела.

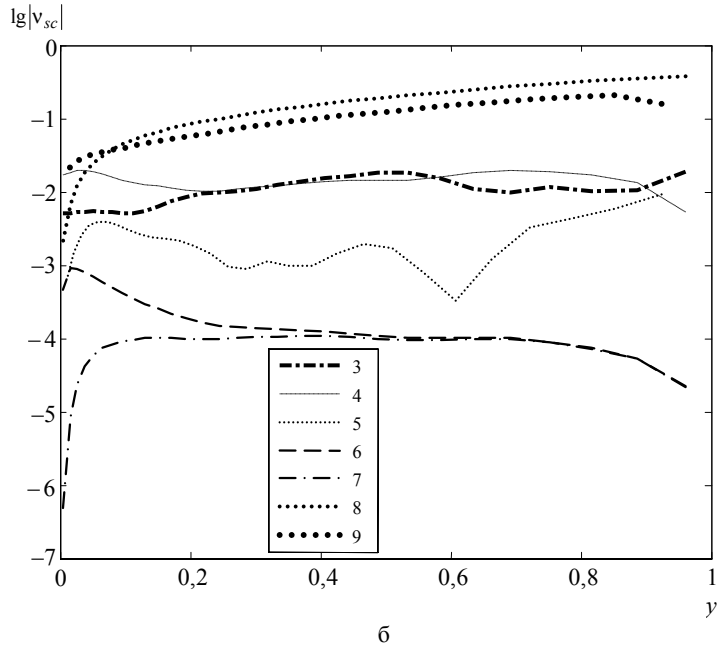
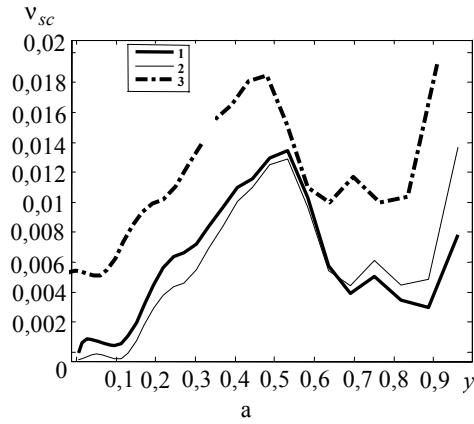


Рис. 3. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$  для варианта 2: 1 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете  $v=0$  по формуле (3); 2 –  $(v_{sc}^{(v)} - v)$ ; 3 –  $v_{sc}^{(v)} = v_{sc} + v$  в расчете с  $v=1/Re_\tau$  по формуле (4); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}^{(3)}$ ; 6, 7 – коэффициент  $v_{SGS}$  модели  $SGS$  в расчетах с  $v=1/Re_\tau$  и  $v=0$  соответственно; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

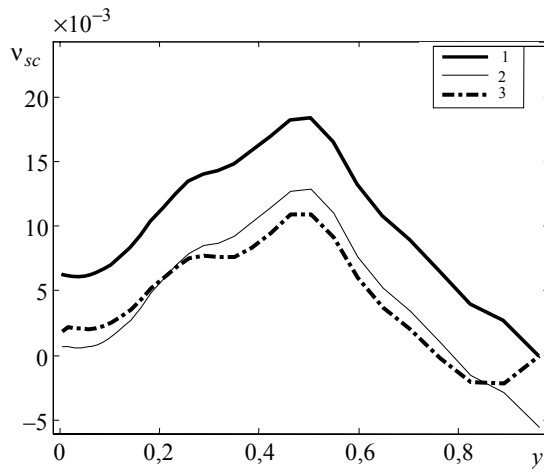
Как видно из рис. 3,б, ближе всего к полученному по формулам (3) и (4) значению схемной вязкости теоретическая оценка (5), исходящая из погрешности схемы 2-го порядка. Оценки (8) и (9) для погрешности 1-го порядка близки, они сильно завышают, а оценка (7) для погрешности 3-го порядка в целом занижает схемную вязкость – то же самое имеет место для всех расчетов данного раздела.

Наконец отметим, что в варианте 2 коэффициент  $v_{SGS}$  в расчетах с моделью  $SGS$  пренебрежимо мал по сравнению с коэффициентом схемной вязкости. Такой же результат получен для всех расчетов данного раздела.

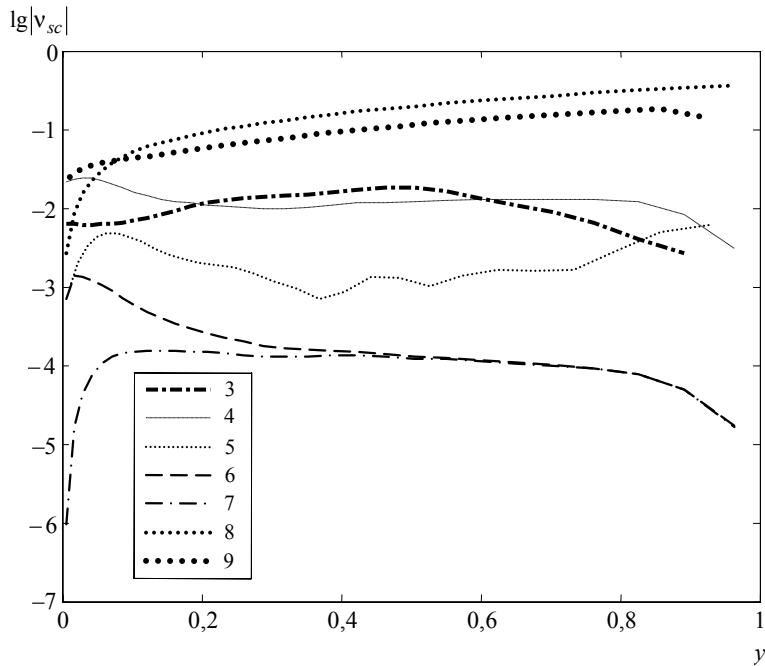
Аналогичные расчеты и оценки для варианта 1, выполненного по той же численной схеме, приводят к близким результатам (рис. 4).

Отметим, что для данных вариантов 1, 2, рассчитанных по схеме  $C-N+MARS$ , практически всюду получается положительное значение  $v_{sc}$ .

Для вариантов 1 и 2 были выполнены также два расчета с молекулярной вязкостью  $v=1/Re_\tau$ : один с подсеточной вязкостью, другой – без нее. Величины схемной вязкости для них неотличимы – соответствующие кривые практически сливаются. Отношение продольных компонент скорости в этих расчетах отличается от единицы не более чем на  $1,6 \cdot 10^{-6}$ . Другими словами, роль подсеточной вязкости (которая на два порядка меньше схемной) ничтожна.



а



б

Рис. 4. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$ , вариант 1: 1 –  $v_{sc}^{(v)} = v_{sc} + v$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$  по формуле (4); 2 –  $(v_{sc}^{(v)} - \nu)$ ; 3 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu = 0$  по формуле (3); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}^{(3)}$ ; 6, 7 – коэффициент  $v_{SGS}$  модели SGS в расчетах с  $\nu = 1/Re_\tau$  и  $\nu = 0$  соответственно; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

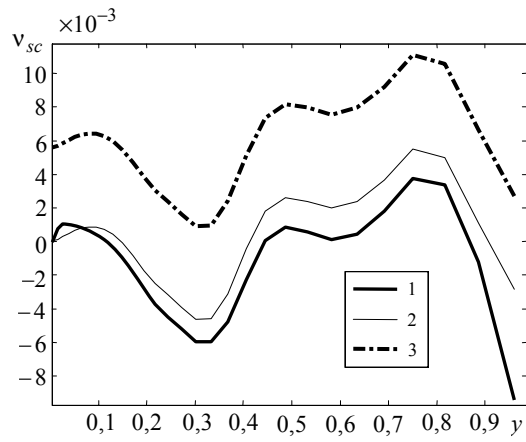
Аналогичные расчеты варианта 4, рассчитанного на той же счетной сетке, но по схеме *Semi-Implicit Euler+CD*, приводят хотя и к меньшим в целом абсолютным значениям  $v_{sc}$ , но с переменным знаком – см. рис. 5,а. Как и в предыдущем случае, кривые 2, 3 близки между собой.

Отметим, что в значительной части канала указанные расчеты близки к теоретической оценке (7) величины  $\tilde{v}_{sc}^{(3)}$  (рис. 5,б), что, по-видимому, говорит о более высоком порядке (более близком к третьему порядку)

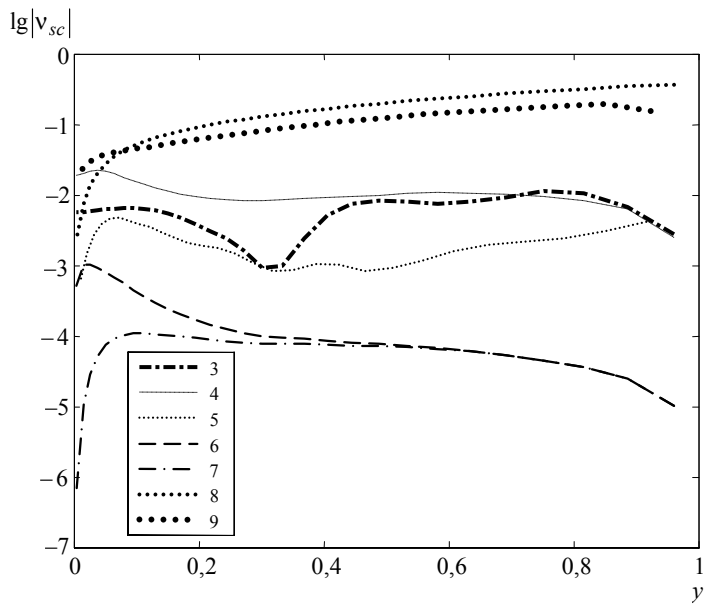
аппроксимации схемы *Semi-Implicit Euler+CD*. То же относится к варианту 3 (см. ниже), также рассчитанному по указанной схеме.

Аналогичные расчеты и оценки для варианта 3, выполненного по той же численной схеме, приводят к близким результатам (рис. 6).

По-прежнему кривые 2, 3 близки между собой (рис. 6,а), что говорит о достаточной точности оценки  $v_{sc}$  по формулам (3), (4). Наибольшее расхождение также наблюдается в центре канала.



a



б

Рис. 5. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$ , вариант 4: 1 –  $v_{sc}^{(v)} = v_{sc} + v$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$  по формуле (4); 2 –  $(v_{sc}^{(v)} - \nu)$ ; 3 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu = 0$  по формуле (3); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}^{(3)}$ ; 6, 7 – коэффициент  $v_{SGS}$  модели *SGS* в расчетах с  $\nu = 1/Re_\tau$  и  $\nu = 0$  соответственно; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

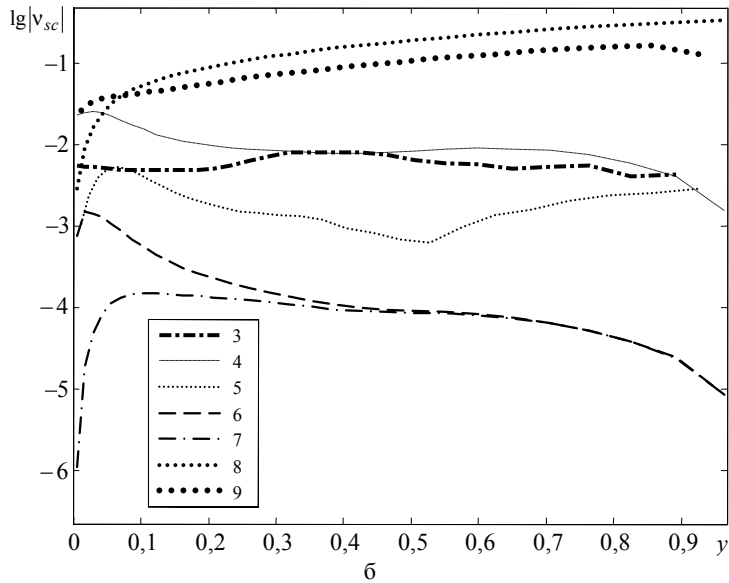
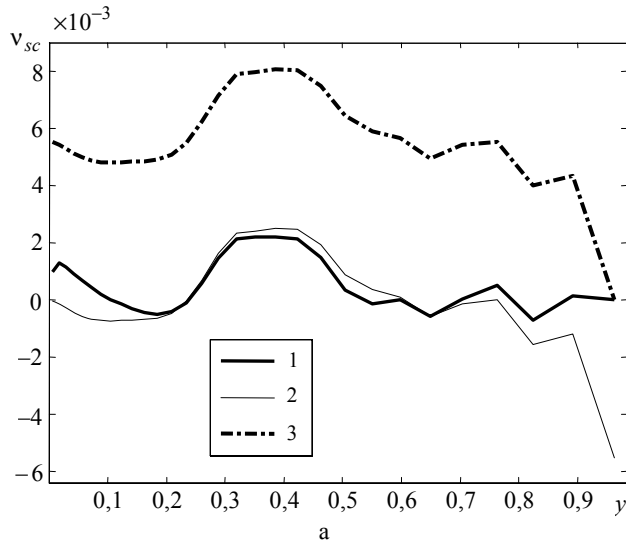


Рис. 6. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$ , вариант 3:  $1 - v_{sc}^{(v)} = v_{sc} + v$  в расчете с  $\nu = 1/\text{Re}_\tau$  по формуле (4);  $2 - v_{sc}^{(v)} - v$ ;  $3 - v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu = 0$  по формуле (3); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}^{(3)}$ ; 6, 7 – коэффициент  $v_{SGS}$  модели  $SGS$  в расчетах с  $\nu = 1/\text{Re}_\tau$  и  $\nu = 0$  соответственно; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

Итак, коэффициент  $v_{SGS}$  в расчетах с моделью  $SGS$  пренебрежимо мал по сравнению со схемной вязкостью. Отметим, что в вариантах 3, 4, выполненных по схеме *Semi-Implicit Euler+CD*, максимальные значения рассчитанных по формулам (3), (4) коэффициентов схемной вязкости в несколько раз меньше соответствующих значений в вариантах 1, 2, выполненных по схеме *C-N+MARS*.

В данных тестовых расчетах, где имеются сравнительно малые градиенты продольной компоненты скорости, совпадающей с ее усредненным профилем в реальном течении, схемная вязкость оказывается порядка молекулярной. Однако надо иметь в виду, что в реальном течении указанные градиенты скорости гораздо

больше (как будет видно ниже), так что оценка (5) существенно превысит молекулярную вязкость. То же относится к оценке (7).

#### 4. Результаты расчетов с начальным профилем мгновенной продольной компоненты скорости и с нулевыми поперечными компонентами и нулевым градиентом давления – шаг по времени $dt = 10^{-5}$

Пусть отключены пульсации  $u_y, u_z$  – задаем лишь мгновенный профиль  $u_x$ .

Рассмотрим простейший случай  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ , а также два случая:  $\nu = 0$  и  $\nu = 1/\text{Re}_\tau$ . Для разных вариантов профили  $u_x$  показаны на рис. 7, 8. Видно, что профили  $u_x$  для  $\nu = 0$  и  $\nu = 1/\text{Re}_\tau$  практически неразличимы.

$y_1$  смысл выражения (10) теряется (его точность уменьшается).

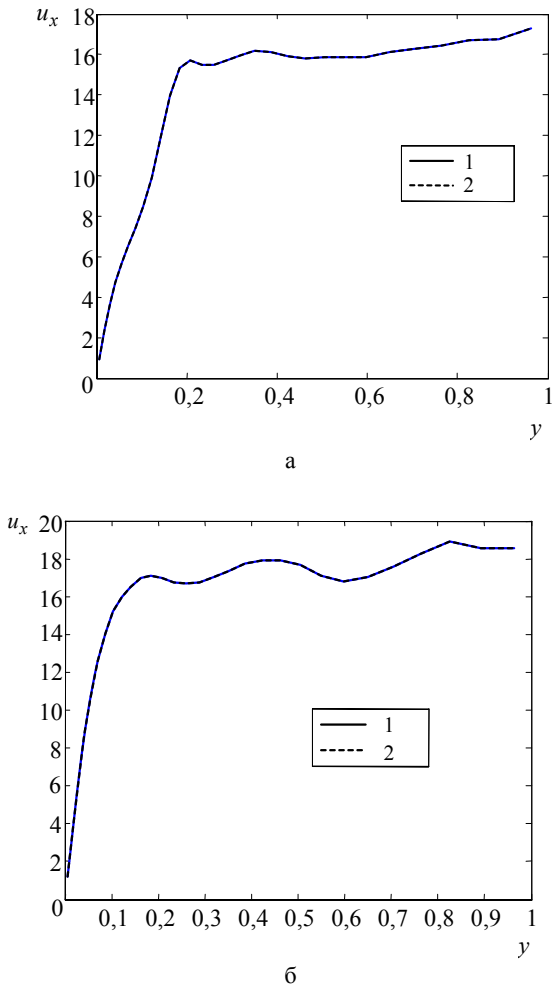


Рис. 7. Профили  $u_x$  для варианта 3 (а) и варианта 1 (б):  
1 – без вязкости; 2 – с вязкостью

Как видно, профиль скорости монотонен лишь на отдельных интервалах, в частности на интервале  $0 \leq y < y_1$  вблизи стенки. Здесь  $y_1$  – координата точки, в которой  $\frac{\partial u}{\partial y}$  обращается в ноль.

Для этого участка следует вместо (3), (4) использовать выражение для схемной вязкости

$$\nu_{sc}(y) = \int_{y_i}^y D_{n-1}^{(u)}(y) dy \left/ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right., \quad (10)$$

где  $i = 1$ . Это выражение справедливо и для любого последующего интервала  $y_{i-1} < y < y_i$  ( $i > 1$ ), на котором профиль скорости монотонен. С приближением к точке

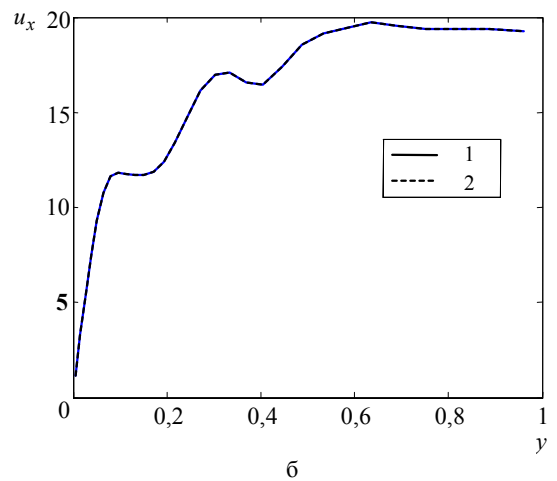
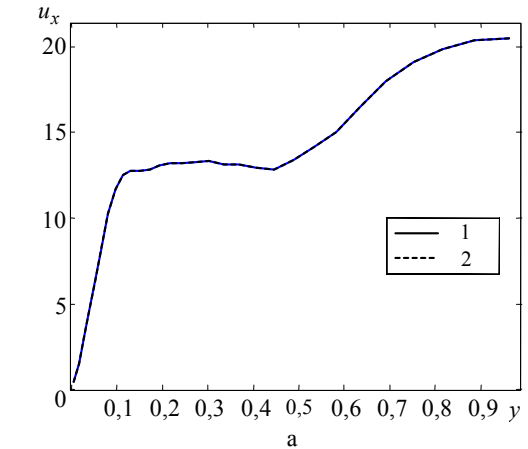


Рис. 8. Профили  $u_x$  для варианта 2 (а) и варианта 4 (б):  
1 – без вязкости; 2 – с вязкостью

На рис. 9,а показаны расчеты  $\nu_{sc}$  для варианта 3. Отличие (порядка коэффициента молекулярной вязкости  $\nu$ ) между кривыми 1–3 относительно мало. Вблизи  $y = y_i \approx 0,18; 0,23; 0,47$   $\nu_{sc}$  меняет знак.

На рис. 9,б показаны расчеты  $\nu_{sc}$  для варианта 3 по формуле (10) в сравнении с теоретическими оценками. Как видно, в промежуточной области схемная вязкость  $\nu_{sc}$ , рассчитанная по формуле (10), заметно больше этих оценок, но в целом ближе всего к оценкам (8) и (9) погрешности 1-го порядка.

Как видно из рис. 9,б, значения  $\nu_{sc}$  заметно больше, чем для соответствующего варианта задачи со средним профилем скорости (см. рис. 6), потому что одновременно происходит переход от погрешности 2-го порядка, имеющей место для регулярных течений, к погрешности 1-го порядка, имеющей место для нерегулярных течений. При этом, как видно из рис. 9,б, оценки схемной вязкости, соответствующие погрешностям 2-го и 3-го порядка (формулы (5) и (7)), сближаются.

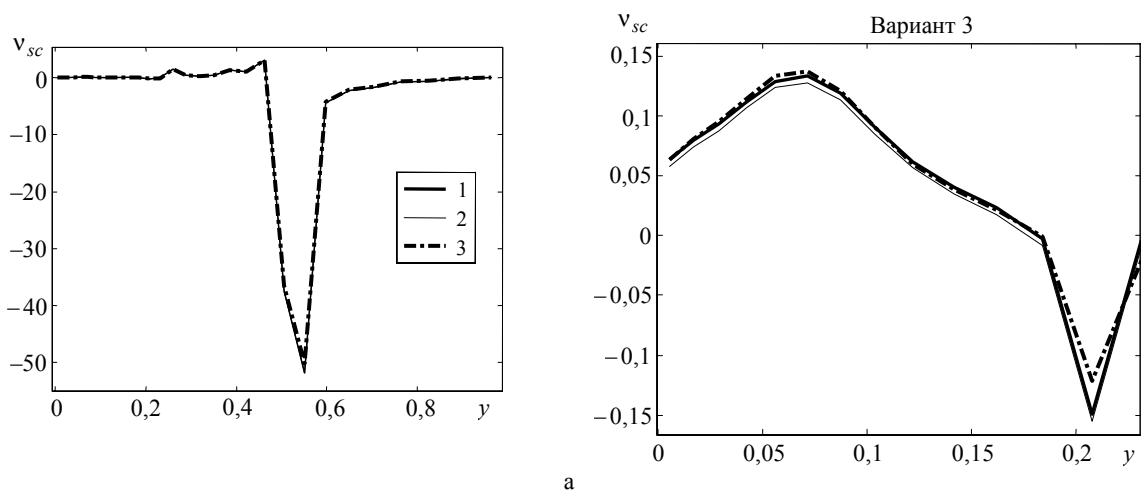


В то же время сравнение  $v_{SGS}$  на рис. 6 и 9,б показывает незначительное возрастание  $v_{SGS}$  (для мгновенного профиля скорости) в основном в центральной части канала. В целом, можно заключить, что коэффициент  $v_{SGS}$  в расчетах с моделью  $SGS$  всюду пренебрежимо мал (по модулю) по сравнению с  $v_{sc}$ .

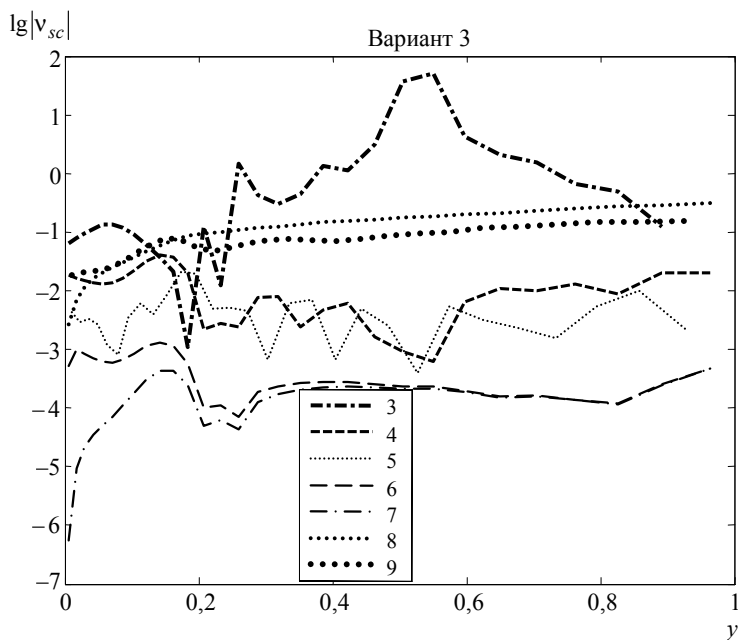
Для варианта 3 были также выполнены два расчета с молекулярной вязкостью  $\nu = 1/Re_\tau$ : один с подсеточной вязкостью, другой – без нее. Величины схемной

вязкости для них неотличимы – соответствующие кривые практически сливаются. Другими словами, роль подсеточной вязкости ничтожна. Поведение решения в других вариантах аналогично.

На рис. 10,а показаны расчеты  $v_{sc}$  по формуле (10) в варианте 1. По-прежнему отличие между кривыми 1–3 относительно мало (порядка коэффициента молекулярной вязкости  $\nu$ ). Вблизи  $y = y_i \approx 0,17; 0,23; 0,43; 0,52; 0,63; 0,86; 0,96$   $v_{sc}$  меняет знак.

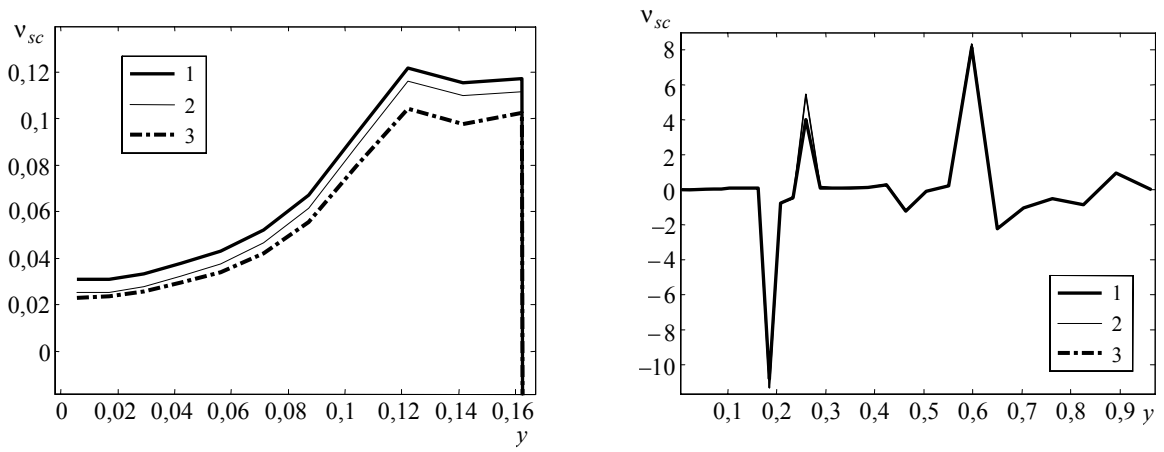


а

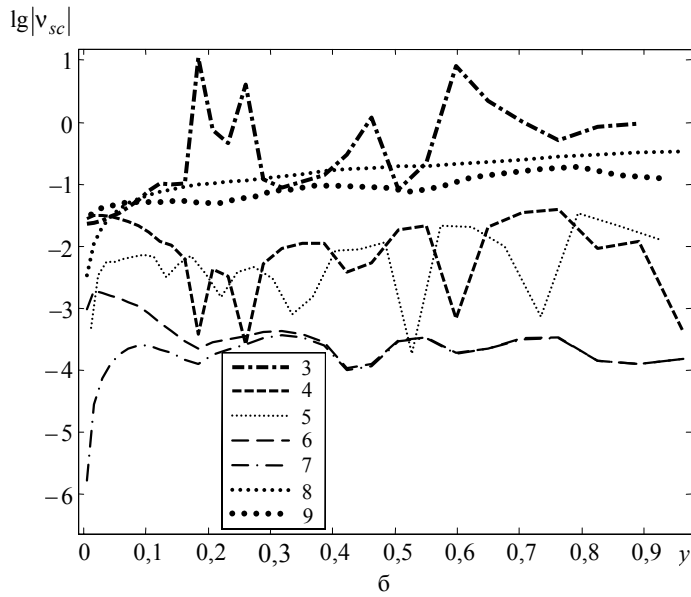


б

Рис. 9. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$  для течения в плоском канале, вариант 3: 1 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu = 0$  по формуле (10); 2 –  $v_{sc}^{(v)} - \nu$ ; 3 –  $v_{sc}^{(v)}$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$  по формуле (10); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 6 –  $v_{SGS}$  в расчете с  $\nu = 0$ ; 7 –  $v_{SGS}$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$ ; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$



a



б

Рис. 10. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$ , вариант 1: 1 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu=0$  по формуле (10); 2 –  $v_{sc}^{(\nu)} - \nu$ ; 3 –  $v_{sc}^{(\nu)}$  в расчете с  $\nu=1/Re_\tau$  по формуле (10); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 6 –  $v_{SGS}$  в расчете с  $\nu=0$ ; 7 –  $v_{SGS}$  в расчете с  $\nu=1/Re_\tau$ ; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

Как и для варианта 3, из рис. 10,б следует, что в целом ближе к полученным по (10) результатам оценки (8) и (9) схемной вязкости 1-го порядка. При этом схемные вязкости, соответствующие погрешностям 2-го и 3-го порядка (кривые 4 и 5), сближаются.

Можно заключить, что в расчетах варианта 1 с моделью *SGS* коэффициент  $v_{SGS}$  всюду пренебрежимо мал (по модулю) по сравнению с  $v_{sc}$ . Можно также видеть, что в этом варианте, выполненном по численной схеме (*C-N+MARS*), значения  $v_{sc}$  в центральной части канала заметно больше, чем в варианте 3, выполненном на такой же сетке, но по схеме (*Semi-Implicit Euler+CD*) (см. рис. 8,б).

В варианте 2 профиль скорости имеет монотонный характер всюду, кроме  $y \approx 0,3$ ,  $y \approx 0,4$  (см. рис. 8,а). Именно между этими точками расчет  $v_{sc}$  по формуле (10)

дает отрицательные значения (рис. 11,а). Надежность оценки (10) величины  $v_{sc}$  подтверждается практически полным совпадением кривых 1–3 всюду, кроме того же интервала  $y \approx 0,3 \div 0,4$ . В остальном результаты данного варианта расчета аналогичны предыдущим.

В варианте 4 профиль скорости весьма немонотонен (см рис. 8,б). Мы, однако, приводим (рис. 12) результаты расчета схемной вязкости для всего интервала  $0 \leq y \leq 1$ , обозначив при этом вертикальными отрезками положение точек  $y_i$ , где производная скорости обращается в ноль. Надежность оценки (10) величины  $v_{sc}$  подтверждается практически полным совпадением кривых 1–3. Из рис. 12,б видно, что в целом расчет  $v_{sc}$  по формуле (10) дает результаты, близкие по порядку величины к оценке (8).

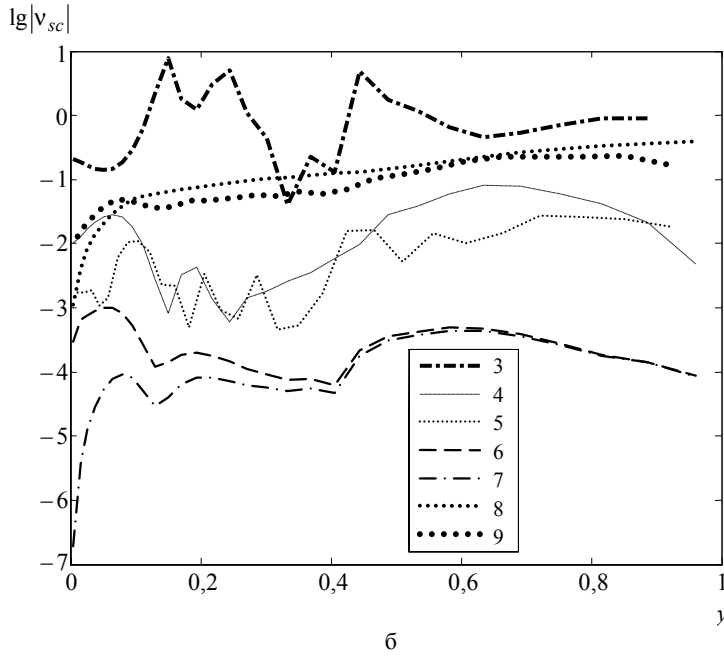
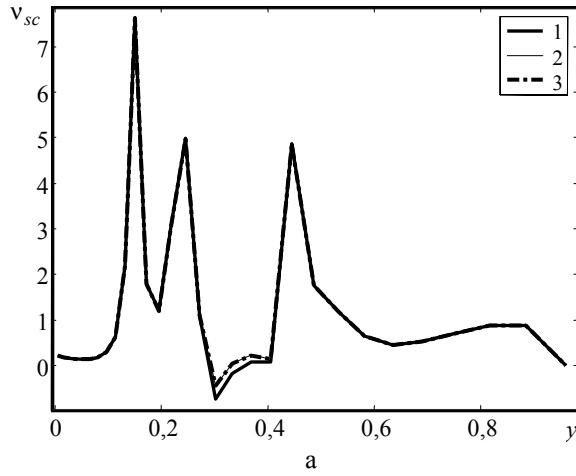


Рис. 11. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$ , вариант 2: 1 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu = 0$  по формуле (10); 2 –  $v_{sc}^{(\nu)} - \nu$ ; 3 –  $v_{sc}^{(\nu)}$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$  по формуле (10); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 6 –  $\nu_{SGS}$  в расчете с  $\nu = 0$ ; 7 –  $\nu_{SGS}$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$ ; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

В данном варианте, как и в предыдущих, коэффициент  $\nu_{SGS}$  в расчетах с моделью  $SGS$  пренебрежимо мал по сравнению с коэффициентом схемной вязкости (рис. 12,б).

Сравнение варианта 4 (см. рис. 12,б), выполненного по схеме (*Semi-Implicit Euler+CD*), с вариантом 2, выполненным на такой же сетке, но по схеме

(*C-N+MARS*) (см. рис. 11,б), показывает, что в целом вариант 4 приводит к меньшим значениям  $\nu_{sc}$ .

Были также выполнены два расчета с молекулярной вязкостью  $\nu = 1/Re_\tau$  один с подсеточной вязкостью, другой – без нее. Величины схемной вязкости для них (как и в предыдущих вариантах расчета в данном разделе) неотличимы, т. е. роль подсеточной вязкости ничтожна.

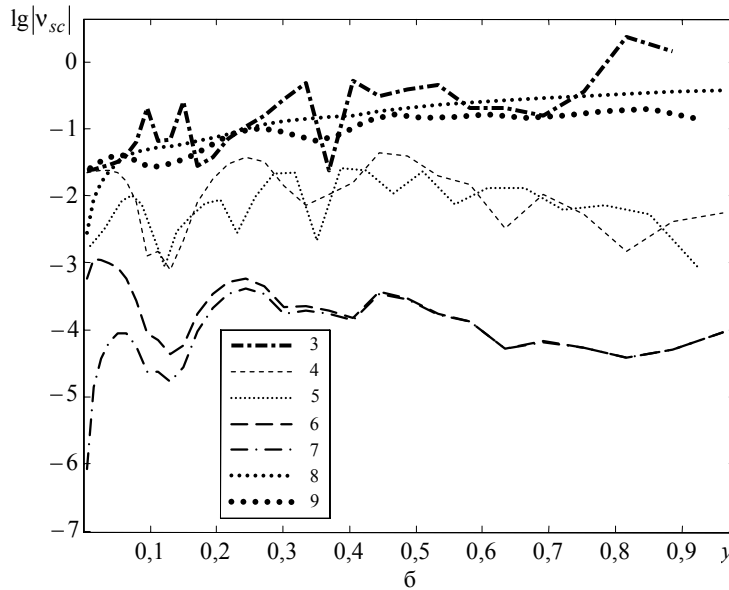
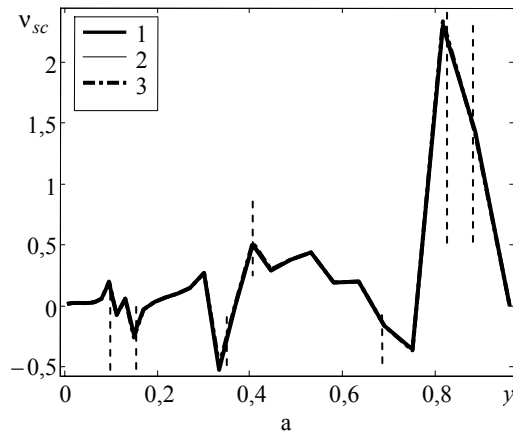


Рис. 12. Профили коэффициента схемной вязкости  $v_{sc}$ , вариант 4: 1 –  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с  $\nu = 0$  по формуле (10); 2 –  $v_{sc}^{(v)} - \nu$ ; 3 –  $v_{sc}^{(v)}$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$  по формуле (10); 4 – оценка (5) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 5 – оценка (7) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 6 –  $v_{SGS}$  в расчете с  $\nu = 0$ ; 7 –  $v_{SGS}$  в расчете с  $\nu = 1/Re_\tau$ ; 8 – оценка (8) величины  $\tilde{v}_{sc}$ ; 9 – оценка (9) величины  $\tilde{v}_{sc}$

## Выводы

1. В задаче с мгновенным профилем скорости кривая  $v_{sc}^{(v)}$  коэффициента схемной вязкости в расчете с молекулярной вязкостью  $\nu = 1/Re_\tau$  близка к кривой  $v_{sc}^{(0)}$  в расчете с нулевой молекулярной вязкостью, что говорит о достаточной точности оценки  $v_{sc}$  по формуле (10).

2. В расчетах, выполненных по схеме (C-N+MARS), максимальные значения коэффициентов схемной вязкости в несколько раз превышают соответствующие значения в расчетах, выполненных по схеме (Semi-Implicit Euler+CD).

3. Во всех вариантах расчета с мгновенным профилем скорости коэффициент схемной вязкости ближе всего к оценкам, следующим для схемы первого поряд-

ка, в то время как во всех вариантах расчета с усредненным профилем скорости значения коэффициентов схемной вязкости ближе всего соответствуют второму порядку численной схемы. Это объясняется тем, что для нерегулярных (турбулентных) течений погрешность схемы сколь угодно высокого порядка аппроксимации будет стремиться к погрешности, даваемой схемой первого порядка.

4. Во всех вариантах расчета коэффициент схемной вязкости возрастает при переходе от усредненного профиля скорости к мгновенному, причем в большей степени, чем коэффициент подсеточной вязкости в модели Смагоринского. Это подтверждает соответствующий переход от погрешности численной схемы второго порядка (именно таков вид подсеточной вязкости в модели Смагоринского), имеющей место для регулярных течений, к погрешности схемы первого порядка, имеющей место для нерегулярных течений.

5. Во всех вариантах расчетов с моделью *SGS* коэффициент  $\nu_{SGS}$  всюду мал (по абсолютной величине) по сравнению с коэффициентом схемной вязкости. Отношение скорости в двух соответствующих расчетах (с подсеточной вязкостью и без нее) отличается от единицы не более чем на  $3 \cdot 10^{-6}$ , а величины схемной вязкости в двух таких расчетах практически неотличимы, что говорит о пренебрежимой роли подсеточной вязкости.

2. Ghosal S. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence // Journal of Computational Physics. 1996. Vol. 125. P. 187–206.

3. Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Численное моделирование опыта по исследованию турбулентного перемешивания после неоднократного прохождения ударной волны через границу раздела // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2004. Вып. 3. С. 17–22.

### Список литературы

1. Moser R. D., Kim J., Mansour N. N. DNS of Turbulent Channel Flow up to  $Re_\tau = 590$  // Phys. Fluids. 1998. Vol. 11. P. 943–945.

Статья поступила в редакцию 17.11.2009