

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ

Н. Б. Бабичев, Б. В. Беженцев, П. С. Бондарев, П. В. Забусов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены точные формулы, выражающие общую зависимость собственных значений от физических величин. Эти формулы справедливы для класса произвольных по изотопному составу однородных односвязных систем, ограниченных невозмущенными поверхностями.

Введение

Целью данной работы является решение задачи на собственные значения (СЗ) в случае односкоростного уравнения переноса нейтронов в произвольных по геометрии и изотопному составу однородных системах.

Для упрощения поставленной задачи ниже приняты следующие предположения: считается, что все нейтроны обладают одинаковой по величине скоростью V , плотность нейтронов n ничтожно мала по сравнению с плотностью ядер вещества n_n , упругое рассеяние нейтронов на ядрах изотропно, а неупругие процессы отсутствуют. При этом кинетическое интегродифференциальное уравнение для нейтронов имеет следующий вид (см., например, [1]):

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}'). \quad (1)$$

Здесь $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора \vec{V} скорости полета нейтрона; $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов \vec{r} и $\vec{\Omega}$ в момент времени t ; $\alpha = n_n(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ и $\beta = n_n(v\sigma_f + \sigma_s)$ – параметры, которые не зависят от координат \vec{r} и времени t ; $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$ – элементарные сечения рассеяния, деления, поглощения; v – среднее число нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра.

Отношение $h = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ будем называть

активностью вещества (в случаях размножающих, поглощающих нейтроны и инертных сред соответственно $h > 1$, $h < 1$ и $h = 1$).

Плотность и векторный поток нейтронов определяются так

$$n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}'), \quad (2)$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = V \int d\vec{\Omega}' \vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}'). \quad (3)$$

1. Ограничение класса рассматриваемых систем

Представленные ниже исследования базируются на кинетическом уравнении (1) с начальным и граничным условиями

$$\psi(t = t_0, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_{00}(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (4)$$

$$\psi|_S = 0 \text{ при } (\vec{\Omega} \vec{e}_S) < 0, \quad (5)$$

\vec{e}_S – внешняя единичная нормаль к поверхности S системы, направленная в сторону вакуума.

Вместо условия (5) можно было бы записать равенство нулю векторного потока на поверхности S , направленного против нормали \vec{e}_S

$$\vec{j}|_S = 0, \text{ если } (\vec{\Omega} \vec{e}_S) < 0. \quad (6)$$

Условия (5), (6) выражают тот факт, что нейтроны, вылетевшие из системы в пустоту, назад в систему не возвращаются. Это требование ограничивает рассматриваемые здесь объекты классом однородных одно-

связных систем с невыгнутыми внешними поверхностями S . В остальном геометрия этих систем произвольна.

Поясним сказанное. В случае многосвязных тел или систем, в которых внешняя поверхность S имеет вогнутые участки, между частями системы возникает обмен нейтронами через вакуумные области. При этом на некоторых участках поверхности S вместо использования граничного условия (5) требуется сшивка решений уравнения (1) и соответствующего решения уравнения для вакуумной области.

2. Задача на собственные значения

Предположим, что функция распределения имеет следующий вид:

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (7)$$

После подстановки соотношения (7) в уравнение (1) получаем основное для дальнейших исследований уравнение относительно функции $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$:

$$\left(\vec{\Omega} \frac{d}{d\vec{r}} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\vec{\Omega}' \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}'). \quad (8)$$

Если система имеет конечные размеры, то при решении уравнения (8) получается дискретный набор собственных значений $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, каждому из которых соответствует собственная функция (СФ) $\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$, $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$, $\psi_2(\vec{r}, \vec{\Omega}) \dots$ (см. [1]).

Общее решение кинетического уравнения (1) будет линейной комбинацией частных решений типа (7)

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{\lambda_m t} \psi_m(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (9)$$

При достаточно больших t в решении (9) можно пренебречь всеми слагаемыми кроме первого и считать, что

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) \simeq a_0 e^{\lambda_0 t} \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (10)$$

Параметр λ_0 назовем главным собственным значением (ГСЗ) и в дальнейшем будем обозначать просто λ .

Из формул (2), (3) и (7) следует, что

$$n(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} n(\vec{r}); \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} \vec{j}(\vec{r}). \quad (11)$$

Задача нахождения собственных значений для систем с произвольной геометрией чрезвычайно сложна и аналитически решается только в довольно простых случаях. Однако общие закономерности можно установить, исследуя уравнение (8) совместно с граничным условием.

3. Общее решение задачи на собственные значения

Сначала приведем некоторые общие формулы, выражающие зависимость величины λ от параметров среды, которые были получены в работе [2].

Нестационарное уравнение переноса (1) инвариантно относительно преобразований подобия с заменой переменных t и \vec{r} на t' и \vec{r}' по правилу

$$t \rightarrow t' = \frac{\rho}{\rho'} t, \quad (12)$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \frac{\rho}{\rho'} \vec{r}. \quad (13)$$

Здесь ρ и ρ' – два произвольных значения плотности вещества. Отмеченное свойство инвариантности легко доказать, если учесть, что параметры α и β пропорциональны плотности ρ , поскольку входящая в них в виде множителя плотность ядер имеет вид

$$n_{\text{я}} = \frac{N_A}{A} \rho, \quad (14)$$

где N_A – число Авогадро; A – массовое число ядра.

На основе инвариантности относительно преобразования (13) в работе [2] удалось показать, что для ГСЗ уравнения (8) в случае произвольной по геометрии системы из некоторого определенного вещества* справедлива следующая общая формула:

$$\lambda = \rho F(\rho R), \quad (15)$$

где R – характерный размер системы (объем и площадь поверхности любого тела с величиной R связаны следующими формулами: $V_T = C_1 R^3$, $S_T = C_2 R^2$, где C_1 и C_2 постоянные, определяемые геометрической формой тела и выбором R в качестве его характерного размера); $F(\rho R)$ – функция, определяемая геометрией системы.

В случае, когда геометрия системы не конкретизирована, функция $F(\rho R)$ является произвольной функцией от аргумента ρR .

Результат (15) работы [2] обобщим на случай произвольных по геометрии систем из произвольных веществ. Исходя из уравнения (8) можно утверждать, что в общем случае искомое решение имеет следующий вид:

$$\lambda = \alpha V F_1(\alpha R, \beta R) = \alpha V F_2(h, \beta R), \quad (16)$$

где F_1 и F_2 – произвольные функции от двух аргументов. Из этого решения видно только, от каких величин в общем случае может зависеть λ и ничего более.

Уточним аналитическую структуру ГСЗ. В уравнении (8) перейдем к безразмерной переменной \vec{z}

$$\vec{z} = \beta \vec{r}. \quad (17)$$

С учетом того, что $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \beta \frac{\partial}{\partial \vec{z}}$, получим кинетическое уравнение для функции $\psi(\vec{z}, \vec{\Omega})$

* Предполагается, что ядерно-физические свойства вещества зафиксированы.

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) + E \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{\Omega}' \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}'), \quad (18)$$

где $E = \frac{1}{\beta} \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right)$ – новое собственное значение.

При решении уравнения (18) совместно с граничными условиями в \bar{z} -пространстве получим дискретный набор новых СЗ $E_0 > E_1 > E_2 > \dots$. Наибольшее СЗ $E = E_0$ будем называть главным СЗ и в дальнейшем обозначать просто E . Очевидно, что главному СЗ E соответствует главное СЗ λ .

В уравнение (18) кроме величины E не входят никакие другие параметры, а соответствующее граничное условие содержит в себе характерный размер.

Из однопипных по геометрической форме систем с разными характерными размерами R выделим те, у которых одинаково произведение βR . После перехода в \bar{z} -пространство все эти системы будут иметь не только одинаковую форму, но и один и тот же характерный размер $Z = \beta R$. Поэтому можно утверждать, что главные собственные числа E для таких систем совпадают.

В случае фиксированного типа геометрии каждому произведению βR будет соответствовать свое, и при этом единственное, число E . Таким образом, мы получаем функцию $E = E(\beta R)$, явный вид которой определяется геометрической формой объекта.

Вспоминая, что $E = \frac{1}{\beta} \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right)$, получаем следующую общую зависимость главного собственного значения λ от характеристик системы:

$$\lambda = \beta V \left[E(\beta R) - \frac{1}{h} \right] = \alpha V [hE(\beta R) - 1]. \quad (19)$$

Из выражений (16) и (19) найдем, к примеру, связь между функциями F_2 и E

$$F_2(h, \beta R) = hE(\beta R) - 1. \quad (20)$$

Запишем уравнение баланса полного числа нейтронов $N = \int n(\vec{r}) d\vec{r}$ в системе

$$\lambda - (\beta - \alpha - W)V = 0; \quad W = \frac{1}{V} \int \vec{j} \vec{e}_s dS. \quad (21)$$

Величину W можно назвать эффективным макроскопическим сечением поглощения нейтронов, связанным с их утечкой из системы. Интеграл $\int \vec{j} \vec{e}_s dS$ равен количеству нейтронов, вылетающих в пустоту в единицу времени. В случае систем произвольного размера R с постоянной плотностью для оценок можно принять,

что величина W пропорциональна отношению поверхности системы к ее объему или же $W \sim \frac{1}{R}$.

При стремлении оптической толщины объекта $p = \alpha R$ к бесконечности величиной W в соотношении (21) можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Тогда получим

$$\lambda = \lambda_\infty = (\beta - \alpha)V = \beta V \left(1 - \frac{1}{h} \right) \quad (22)$$

и для произвольных по геометрии систем имеем

$$\lim_{\beta R \rightarrow \infty} E(\beta R) = 1. \quad (23)$$

Приведенные выше формулы были получены для главного собственного значения $\lambda = \lambda_0$. В случае СЗ с номером m имеет место следующая формула:

$$\lambda_m = \beta V \left[E_m(\beta R) - \frac{1}{h} \right]. \quad (24)$$

Здесь $E_m(\beta R)$ – функция, явный вид которой определяется геометрией системы.

4. Некоторые замечания

Следует отметить, что представленные выше новые формулы для СЗ столь же точны, сколь и кинетическое уравнение, на основе которого они были получены.

Эти формулы дают наглядное представление о том, какие физические величины и каким образом влияют на СЗ.

С помощью полученных общих формул для λ можно проводить тестирование различных аналитических решений задачи на СЗ, а также результатов численных расчетов по математическим методикам.

Общие формулы для СЗ могут оказаться полезными при построении интерполяционных соотношений и для экстраполяции известных данных в неисследованную область изменения физических параметров.

Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
2. Бабичев Н.Б., Лутиков И.В., Незнамов В.П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ, Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–64.

Статья поступила в редакцию 17.11.2009