УДК 530.145

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ОБОБЩЕННОЙ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ С МАКСИМАЛЬНЫМ МАССОВЫМ ПАРАМЕТРОМ *M*

В. П. Незнамов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В работе в рамках модели с максимальным массовым параметром M и с использованием пятимерного пространства Де Ситтера исследуются свойства уравнения Дирака для фермиона с массой m, находящегося на массовой поверхности $\left(p_5 = \pm\sqrt{M^2 - m^2}\right)$.

Показано, что свободный гамильтониан и гамильтониан с взаимодействием являются псевдоэрмитовыми.

Если ввести соответствующие правила обращения с псевдоэрмитовыми гамильтонианами, то можно построить последовательную квантовую теорию с конечными результатами, совпадающими с результатами при использовании обычного уравнения Дирака.

Введение

В работах [2 – 9] В. Г. Кадышевский с сотрудниками развил идеи М. А. Маркова [1] о существовании максимальной массы элементарных частиц M. В этих работах существование массы M понимается как новый фундаментальный принцип Природы, который подобен релятивистским и квантовым постулатам, лежащим в основах квантовой теории поля.

Условие конечности спектра масс элементарных частиц достигается введением соотношения

$$m \le M\ , \tag{1}$$

где массовый параметр M является новой физической константой. У М. А. Маркова в работе [1]

$$M \cong m_{planck} = 10^{19}\ \text{ГэВ}.$$

В работах [2 – 9] на основе соотношения (1) развита новая концепция локальной квантовой теории с построением соответствующих лагранжианов для бозонных и фермионных полей. Выполнение соотношения (1) достигается введением пятимерного пространства Де Ситтера* подобно тому, как для выполнения релятивистских условий в свое время потребовался переход от трехмерного пространства к четырехмерному пространству – времени Минковского.

В пятимерном импульсном пространстве Де Ситтера аналог релятивистского соотношения между энергией и импульсом частицы с выполнением условия (1) записывается в виде

$$p_0{}^2 - \mathbf{p}^2 + p_5{}^2 = M^2 . \tag{2}$$

На массовой поверхности для частиц массой m выполняется соотношение $p_0{}^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ и очевидно выполнение равенства

$$p_5{}^2 = M^2 - m^2 . \tag{3}$$

Как отмечается в работе [9], введение массового параметра M означает существование фундаментальной длины $l = \hbar / Mc$. В последнее время интерес к введению минимальной длины возрос в связи с теоретическими исследованиями в квантовой теории гравитации и в теории струн (см., например, [10 – 12]).

В настоящей работе исследуются свойства уравнения Дирака, введенного в работе [9] с использованием параметра M и пятимерного пространства Де Ситтера.

1. Уравнение Дирака в пространстве Де Ситтера

Первоначально рассмотрим свободное движение дираковской частицы массой m.

* Точнее следовало бы записать «anti de Sitter space»; однако неоднозначность русского перевода этого словосочетания вынудила автора использовать в работе выражение «пространство Де Ситтера».

В соответствии с работой [9] равенство (2) на массовой поверхности $p_0{}^2-\mathbf{p}^2=m^2$ можно записать в виде

$$\left(p_5+M\cos\mu\right)\left(p_5-M\cos\mu\right)=0, \tag{4}$$

где $\cos\mu=\sqrt{1-\dfrac{m^2}{M^2}}$.

Каждый из сомножителей (4) может быть представлен в виде

$$-2M\left(p_5+M\cos\mu\right)=$$
$$=\left(\gamma^0 p_0-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-\gamma^5\left(p_5+M\right)-2M\sin\frac{\mu}{2}\right)\times$$
$$\times\left(-\gamma^0 p_0+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}+\gamma^5\left(p_5+M\right)-2M\sin\frac{\mu}{2}\right); \tag{5}$$

$$2M\left(p_5-M\cos\mu\right)=$$
$$=\left(\gamma^0 p_0-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-\gamma^5\left(p_5-M\right)+2M\sin\frac{\mu}{2}\right)\times$$
$$\times\left(-\gamma^0 p_0+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}+\gamma^5\left(p_5-M\right)+2M\sin\frac{\mu}{2}\right). \tag{6}$$

В выражении (5) $p_5=-\sqrt{M^2-m^2}=-M\cos\mu$; в выражении (6) $p_5=\sqrt{M^2-m^2}=M\cos\mu$.

Рассматривая (5), (6) как операторы в конфигурационном пространстве $\left(x^0,\mathbf{x},x_5\right)$ и действуя ими на дираковский биспинор $\psi(x,x_5)$, получим следующие четыре уравнения:

$$\begin{cases} p_0\psi_1(x,x_5)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2\right)\psi_1(x,x_5); \\ p_0\psi_2(x,x_5)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta\gamma^5 m_1-\beta m_2\right)\psi_2(x,x_5); \end{cases} \quad p_5=-\sqrt{M^2-m^2};$$

$$\tag{7}$$

$$\begin{cases} p_0\psi_3(x,x_5)=(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}-\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2\psi_3(x,x_5); \\ p_0\psi_4(x,x_5)=(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}-\beta\gamma^5 m_1-\beta m_2\psi_4(x,x_5); \end{cases} \quad p_5=\sqrt{M^2-m^2}.$$

В уравнениях (5)–(7) и ниже $\hbar=c=1$; $\gamma^0=\beta$, $\gamma^i=\beta\alpha^i$, $\gamma^5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ – четырехмерные матрицы Дирака; $m_1=2M\sin^2\dfrac{\mu}{2}$, $m_2=2M\sin\dfrac{\mu}{2}$, $m_2{}^2-m_1{}^2=m^2$, для случая $m<<M$ $m_1\approx\dfrac{m^2}{2M}$, $m_2\approx m\left(1+\dfrac{1}{8}\dfrac{m^2}{M^2}\right)$.

Уравнения (7) отличаются друг от друга лишь знаками перед членами с m_1 и m_2. По физическим следствиям уравнения (7) эквивалентны друг другу по аналогии с обычными уравнениями Дирака с разными знаками перед массовым членом.

Выражение (4) допускает и другое расщепление [9], которое для краткости можно записать в виде

$$\pm 2M\left(p_5\mp M\cos\mu\right)=$$
$$=\left(-\gamma^0 p_0+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-\gamma^5\left(p_5\pm M\right)\pm 2M\cos\frac{\mu}{2}\right)\times$$
$$\times\left(-\gamma^0 p_0+\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-\gamma^5(p_5\pm M)\mp 2M\cos\frac{\mu}{2}\right). \tag{8}$$

В выражении (8) для верхнего ряда знаков $p_5=+\sqrt{M^2-m^2}$; соответственно для нижнего ряда $p_5=-\sqrt{M^2-m^2}$.

Аналогично (7) можно записать четыре эквивалентных уравнения, отличающиеся знаками перед массовыми членами

$$\begin{cases} p_0\psi_5(x,x_5)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta\gamma^5 m_3+\beta m_4\right)\psi_5(x,x_5); \\ p_0\psi_6(x,x_5)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta\gamma^5 m_3-\beta m_4\right)\psi_6(x,x_5); \end{cases} \quad p_5=-\sqrt{M^2-m^2};$$

$$\tag{9}$$

$$\begin{cases} p_0\psi_7(x,x_5)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}-\beta\gamma^5 m_3+\beta m_4\right)\psi_7(x,x_5); \\ p_0\psi_8(x,x_5)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}-\beta\gamma^5 m_3-\beta m_4\right)\psi_8(x,x_5); \end{cases} \quad p_5=\sqrt{M^2-m^2}.$$

В равенствах (9) $m_3=2M\cos^2\dfrac{\mu}{2}$; $m_4=2M\cos\dfrac{\mu}{2}$.

В отличие от величин m_1, m_2 в (7) для случая $m<<M$ массы m_3, m_4 велики $\left(m_3\approx 2M\left(1-\dfrac{1}{4}\dfrac{m^2}{M^2}\right),\ m_4\approx 2M\left(1-\dfrac{1}{8}\dfrac{m^2}{M^2}\right),\text{ но } m_4{}^2-m_3{}^2=m^2\right)$.

2. Эрмитовы свойства гамильтониана Дирака в пространстве Де Ситтера

2.1. Свободное движение дираковской частицы массой *m*

Для дальнейшего рассмотрения можно взять любой из эквивалентных гамильтонианов в уравнениях (7), (9). Пусть

$$H_0=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2. \tag{10}$$

Видно, что из-за наличия члена с m_1 выражение (10) неэрмитово $(H_0\neq H_0{}^\dagger)$. Однако $H_0{}^2=E^2=m^2+\mathbf{p}^2$ и, очевидно, решения уравнения Дирака с гамильтонианом (10) будут представлять собой плоские волны с непрерывным энергетическим спектром $E=\pm\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$.

Проанализируем гамильтониан (10) с точки зрения неэрмитовой квантовой механики, бурно развивающейся в последние годы. Фундаментальной доктриной квантовой механики являлось то, что гамильтониан и все физические наблюдаемые должны представляться эрмитовыми матрицами. Более десяти лет назад Bender et al. [13] показали, что этот принцип можно до некоторой степени смягчить. Эрмитовость в канонической формулировке квантовой механики обеспечивает действительный спектр собственных значений рассматриваемых операторов. Авторы [13] показали, что эрмитовость достаточна, но не необходима для этих целей. Действительность собственных значений и последовательное квантово-механическое описание может быть сформулировано при ряде более общих требований в отсутствие эрмитовости.

При этом операторы могут быть квазиэрмитовыми [14], псевдоэрмитовыми [15] и/или PT-симметричными [16].

A. Mostafazadeh в работах [15, 17], определил необходимые и достаточные условия действительности спектра собственных значений псевдоэрмитовых и PT-симметричных гамильтонианов и формализовал работу с этими гамильтонианами.

Следуя работам [15, 17] определим эрмитов оператор ρ, который преобразованием подобия переводит гамильтониан (10) в эрмитово сопряженный

$$\rho H_0 \rho^{-1} = H_0{}^{\dagger}. \tag{11}$$

Искомый оператор ρ можно представить в виде

$$\rho = 1 + \frac{m_1{}^2}{E(E+m_2)} + \frac{\gamma^5 m_1}{E} + \frac{\gamma^5 m_1 \beta \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{E(E+m_2)}; \tag{12}$$

$$\rho^{-1} = 1 + \frac{m_1{}^2}{E(E+m_2)} - \frac{\gamma^5 m_1}{E} - \frac{\gamma^5 m_1 \beta \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{E(E+m_2)}. \tag{13}$$

Выражения (12), (13) обеспечивают выполнение условия псевдоэрмитовости (11). Скалярное произведение в гильбертовом пространстве записывается в этом случае с весом оператора ρ

$$<\phi|\psi>_{\rho} = <\phi|\rho\psi>. \tag{14}$$

Если оператор ρ можно представить в виде произведения двух операторов

$$\rho = \eta^{\dagger}\eta, \tag{15}$$

то преобразованием подобия, т. е. с сохранением спектра собственных значений, гамильтониан (10) можно привести к эрмитову виду

$$\eta H_0 \eta^{-1} = H_{FW} = H_{FW}{}^{\dagger}. \tag{16}$$

Для оператора ρ в виде (12) выражения для операторов η, η^{-1} выглядят следующим образом:

$$\eta = \sqrt{\frac{E+m_2}{2E}}\left(1 + \frac{1}{E+m_2}\left(\beta\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \gamma^5 m_1\right)\right); \tag{17}$$

$$\eta^{-1} = \sqrt{\frac{E+m_2}{2E}}\left(1 + \frac{1}{E+m_2}\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\beta - \gamma^5 m_1\right)\right). \tag{18}$$

Выражение (16) с учетом (17), (18) равно

$$\eta\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta\gamma^5 m_1 + \beta m_2\right)\eta^{-1} = \beta E = \beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \tag{19}$$

Выражение (19) фактически представляет собой свободный гамильтониан Фолди – Ваутхайзена [18] со спектром собственных значений $\pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$.

Выражения (17), (18) представляют собой операторы неунитарного преобразования Фолди – Ваутхайзена применительно к гамильтониану (10).

Таким образом, мы показали, что гамильтониан H_0 – псевдоэрмитов с тем же действительным спектром собственных значений, что и у свободного гамильтониана Фолди – Ваутхайзена.

Решениями уравнений (7), (9) являются плоские волны с положительной и отрицательной энергией:

$$\psi_D{}^{(+)}(x,s) = U_s e^{-ipx};\quad \psi_D{}^{(-)}(x,s) = V_s e^{ipx};$$
$$p_0 = E = \left(m^2 + \mathbf{p}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Для гамильтониана (10)

$$U_s = \sqrt{\frac{E+m_2}{2E}}\begin{pmatrix}\varphi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - m_1}{E+m_2}\varphi_s\end{pmatrix};\quad V_s = \sqrt{\frac{E+m_2}{2E}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - m_1}{E+m_2}\chi_s \\ \chi_s\end{pmatrix}. \tag{21}$$

В (21) $\mathbf{p}$ и E – операторы импульса и энергии частицы с массой m; φ_s и χ_s – двухкомпонентные нормированные спиновые функции Паули.

Для U_s и V_s с учетом весового оператора ρ (12) справедливы следующие соотношения ортонормированности и полноты:

$$U_s{}^{\dagger}\rho U_{s'} = V_s{}^{\dagger}\rho V_{s'} = \delta_{ss'};\quad U_s{}^{\dagger}\rho V_{s'} = V_s{}^{\dagger}\rho U_{s'} = 0;$$
$$\sum_s (U_s)_{\alpha}(U_s{}^{\dagger})_{\beta}\rho_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{H_0}{E}\right)_{\alpha\delta}; \tag{22}$$
$$\sum_s (V_s)_{\alpha}(V_s{}^{\dagger})_{\beta}\rho_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H_0}{E}\right)_{\alpha\delta}.$$

В выражениях (20) – (22) значки α, β, δ относятся к спинорным индексам, значки s, s' – к спиновым индексам. Далее при суммировании по спинорным индексам знак суммы и сами индексы могут не указываться.

2.2. Движение дираковской частицы во внешнем поле

Гамильтониан (10) при наличии внешнего калибровочного векторного абелева поля B^{μ} можно записать в виде

$$H_D = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta\gamma^5 m_1 + q\alpha_{\mu}B^{\mu}. \tag{23}$$

В выражении (23) $\alpha^{\mu}=\begin{cases}1, & \mu=0;\\ \alpha^{i}, & \mu=i=1,2,3;\end{cases}$ q – константа связи.

Абелев случай для поля B^{μ} рассматривается для простоты. Для общего случая дираковской частицы, взаимодействующей с неабелевым бозонным калибровочным полем, выводы, полученные в настоящей работе, не изменяются.

Для гамильтониана (23) вид операторов ρ и η для приведения (23) к эрмитову виду с сохранением спектра собственных значений в настоящее время не установлен.

Однако можно показать, что гамильтониан (23) вместе с гамильтонианом, отличающимся от (23) знаком перед неэрмитовым членом с массой m_1, являются псевдоэрмитовыми и, следовательно, с ними можно работать в рамках формализма [15, 17].

Действительно, введем восьмикомпонентный спинор $\phi(x)$ с четырьмя верхними компонентами, являющимися решением уравнения Дирака с гамильтонианом (23) и четырьмя нижними компонентами – решениями уравнения Дирака с гамильтонианом, отличающимся от (23) знаком перед членом с массой m_1. Введем также изотопические матрицы $\tau_3=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$ и $\tau_1=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$, действующие в изотопическом пространстве четырех верхних и четырех нижних компонент спинора $\phi(x)$.

Тогда два уравнения Дирака (7) с включением взаимодействия с полем B^{μ} можно записать в виде

$$\begin{cases}p_0\psi_2(x)=(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2+q\alpha_{\mu}B^{\mu})\psi_2(x);\ p_5=-\sqrt{M^2-m^2};\\ p_0\psi_3(x)=(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}-\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2+q\alpha_{\mu}B^{\mu})\psi_3(x);\ p_5=\sqrt{M^2-m^2};\end{cases} \tag{24}$$

$$\phi(x)=\begin{pmatrix}\psi_2(x)\\ \psi_3(x)\end{pmatrix}; \tag{25}$$

$$p_0\phi(x)=\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\tau_3\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2+q\alpha_{\mu}B^{\mu}\right)\phi(x). \tag{26}$$

В выражениях (24)–(26) и ниже координата x_5 взята равной нулю [9].

В уравнении (26), как это видно из (24), содержатся две ветви возможных значений $p_5=\pm\sqrt{M^2-m^2}$.

Из уравнения (26) видно, что роль оператора ρ в данном случае играет матрица $\tau_1=\tau_1^{-1}$

$$\tau_1 H_{\phi}\tau_1=\tau_1\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\tau_3\beta\gamma^5 m_1+\beta m_2+q\alpha_{\mu}B^{\mu}\right)\tau_1=H_{\phi}^{\dagger}. \tag{27}$$

Равенство (27) позволяет заключить, что гамильтониан уравнения (26) H_{ϕ} является псевдоэрмитовым.

Уравнение (26) вместе с его гамильтонианом можно перевести в представление Фолди–Ваутхайзена, используя формализм, ранее развитый автором для стандартного уравнения Дирака [20], и обобщение условия эрмитового сопряжения для любых операторов $(L^{\dagger})_{gen}=\tau_1 L^{\dagger}\tau_1$, вытекающего из псевдоэрмитовости гамильтониана (26).

Гамильтониан уравнеия (26) в представлении Фолди–Ваутхайзена является эрмитовым с действительным спектром собственных значений.

Все выводы, ранее полученные для обычного модифицированного и изотопического представления Фолди–Ваутхайзена [20, 21], сохраняют свою силу и для рассматриваемого нами случая. В частности, матрицы преобразования Фолди–Ваутхайзена для свободного движения совпадают с полученными в подразделе 3.1 матрицами η, η^{-1}. В качестве η^{-1} должна использоваться матрица $\eta^{-1}=\tau_1\eta^{\dagger}\tau_1=((U_0)_{FW}{}^{\dagger})_{gen}$.

Базисные функции свободного движения для уравнения (26) с $B^{\mu}=0$ соответствуют выражениям (20), (21) с выбором соответствующего знака перед m_1. В соответствии с уравнением (26) имеются по два решения как с положительной, так и с отрицательной энергией

$$\begin{aligned}
\phi_1{}^{(+)}(x,s)&=U_s\left(T_3=+\frac{1}{2}\right)e^{-ipx}=\begin{pmatrix}U_s(m_1)\\ 0\end{pmatrix}e^{-ipx};\\
\phi_2{}^{(+)}(x,s)&=U_s\left(T_3=-\frac{1}{2}\right)e^{-ipx}=\begin{pmatrix}0\\ U_s(-m_1)\end{pmatrix}e^{-ipx};\\
\phi_1{}^{(-)}(x,s)&=V_s\left(T_3=+\frac{1}{2}\right)e^{ipx}=\begin{pmatrix}V_s(m_1)\\ 0\end{pmatrix}e^{ipx};\\
\phi_2{}^{(-)}(x,s)&=V_s\left(T_3=-\frac{1}{2}\right)e^{ipx}=\begin{pmatrix}0\\ V_s(-m_1)\end{pmatrix}e^{ipx}.
\end{aligned} \tag{28}$$

В выражениях (28) T_3 – третья компонента изотопического спина.

Соотношения ортонормированности и полноты для восьмикомпонентных функций $U_s\left(T_3=\pm\frac{1}{2}\right)$, $V_s\left(T_3=\pm\frac{1}{2}\right)$ имеют следующий вид (ниже H_0 – гамильтониан уравнения (26) с $B^{\mu}=0$):

$$\begin{aligned}
&U_s^{\dagger}\left(T_3=\mp\frac{1}{2}\right)\tau_1 U_{s'}\left(T_3=\pm\frac{1}{2}\right)=\\
&=V_s^{\dagger}\left(T_3=\mp\frac{1}{2}\right)\tau_1 V_{s'}\left(T_3=\pm\frac{1}{2}\right)=\delta_{ss'};\\
&U_s^{\dagger}\left(T_3=\mp\frac{1}{2}\right)\tau_1 V_{s'}\left(T_3=\pm\frac{1}{2}\right)=\\
&=V_s^{\dagger}\left(T_3=\mp\frac{1}{2}\right)\tau_1 U_{s'}\left(T_3=\pm\frac{1}{2}\right)=0;
\end{aligned}$$

$$\sum_s \left(U_s \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) \right)_\alpha \left(U_s^\dagger \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \right)_\beta (\tau_1)_{\beta\gamma} = = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{H_0}{E} \right) \frac{1}{2} (1 \pm \tau_3) \right]_{\alpha\gamma};$$

$$\sum_s \left(V_s \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) \right)_\alpha \left(V_s^\dagger \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \right)_\beta (\tau_1)_{\beta\gamma} = = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{H_0}{E} \right) \frac{1}{2} (1 \pm \tau_3) \right]_{\alpha\gamma}.$$

Уравнение (26), как и (7), (9), можно записать в релятивистски ковариантном виде

$$\left(\hat{p} - \tau_3 \gamma^5 m_1 - m_2 - q \gamma_\mu B^\mu \right) \phi(x) = 0 . \qquad (29)$$

В уравнении (29) $\hat{p} = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}$.

Для случая $m << M$ членом с m_1 в уравнениях (7) и (29) можно пренебречь и прийти к стандартному уравнению Дирака. Для уравнений (9) необходимо учитывать оба массовых члена с m_3 и m_4, но всегда на массовой поверхности ${m_4}^2 - {m_3}^2 = m^2$.

Аналогом базисных функций (28) для уравнения (29) будут дираковские функции $u(p,s)$, $v(p,s)$ [19], обобщенные на восьмикомпонентный случай и с соответствующим значением $T_3 = \pm \frac{1}{2}$. Для этих функций справедливы следующие соотношения:

$$\left(\hat{p} - \tau_3 \gamma^5 m_1 - m_2 \right) u(p,s,T_3) = 0;$$
$$\bar{u} \tau_1 \left(\hat{p} - \tau_3 \gamma^5 m_1 - m_2 \right) = 0;$$
$$\left(\hat{p} + \tau_3 \gamma^5 m_1 + m_2 \right) v(p,s,T_3) = 0;$$
$$\bar{v} \tau_1 \left(\hat{p} + \tau_3 \gamma^5 m_1 + m_2 \right) = 0 ; \qquad (30)$$

$$\bar{u}_s \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \tau_1 u_{s'} \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) = = \bar{v}_s \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \tau_1 v_{s'} \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) = \delta_{ss'}; \qquad (31)$$

$$\bar{u}_s \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \tau_1 v_{s'} \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) = = \bar{v}_s \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \tau_1 u_{s'} \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) = 0 .$$

Проекционные операторы для входящих фермионных линий фейнмановских диаграмм:

$${\Lambda_u}^{(+)}(p) = \frac{1}{2(\tau_3 \gamma^5 m_1 + m_2)} \left(\hat{p} + \tau_3 \gamma^5 m_1 + m_2 \right) = = \frac{\left(m_2 - \tau_3 \gamma^5 m_1 \right) \hat{p} + m^2}{2m^2};$$

$${\Lambda_u}^{(+)} u = u; \quad \left({\Lambda_u}^{(+)} \right)^2 u = {\Lambda_u}^{(+)} u; \qquad (32)$$

$${\Lambda_v}^{(-)}(p) = -\frac{\left(m_2 - \tau_3 \gamma^5 m_1 \right) \hat{p} - m^2}{2m^2}; \quad {\Lambda_v}^{(-)} v = v;$$
$$\left({\Lambda_v}^{(-)} \right)^2 v = {\Lambda_v}^{(-)} v .$$

Проекционные операторы для выходящих фермионных линий:

$$\Lambda_{\bar{u}}^{(+)}(p) = \frac{\hat{p} \left(m_2 - \tau_3 \gamma^5 m_1 \right) + m^2}{2m^2}; \quad \bar{u} \tau_1 \Lambda_{\bar{u}}^{(+)} = \bar{u} \tau_1;$$
$$\bar{u} \tau_1 \left(\Lambda_{\bar{u}}^{(+)} \right)^2 = \bar{u} \tau_1 \Lambda_{\bar{u}}^{(+)};$$
$$\Lambda_{\bar{v}}^{(-)}(p) = -\frac{\hat{p} \left(m_2 - \tau_3 \gamma^5 m_1 \right) - m^2}{2m^2}; \quad \bar{v} \tau_1 {\Lambda_v}^{(-)} = \bar{v} \tau_1;$$
$$\bar{v} \tau_1 \left(\Lambda_{\bar{v}}^{(-)} \right)^2 = \bar{v} \tau_1 \Lambda_{\bar{v}}^{(-)} . \qquad (33)$$

Соотношения полноты для входящих и выходящих фермионных линий:

$$\sum_s \left(u_s \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) \right)_\alpha \left(\bar{u}_s \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \right)_\beta (\tau_1)_{\beta\gamma} = \left(\Lambda_u^{(+)} \frac{1}{2} (1 \pm \tau_3) \right)_{\alpha\gamma};$$
$$(34)$$
$$\sum_s \left(v_s \left(T_3 = \pm \frac{1}{2} \right) \right)_\alpha \left(\bar{v}_s \left(T_3 = \mp \frac{1}{2} \right) \right)_\beta (\tau_1)_{\beta\gamma} = \left(\Lambda_v^{(-)} \frac{1}{2} (1 \pm \tau_3) \right)_{\alpha\gamma}.$$

В выражениях (30)–(34) обозначения $\bar{u}$, $\bar{v}$ как всегда означают эрмитовское сопряжение биспиноров u, v с одновременным умножением на матрицу γ^0.

3. Обсуждение результатов

Приведенные в предыдущем разделе исследования показали, что дираковские гамильтонианы частицы с массой m с предельным массовым параметром M в присутствии и отсутствие взаимодействия с калибровочными бозонными полями для рассматриваемого нами случая $p_5 = \pm \sqrt{M^2 - m^2}$ являются псевдоэрмитовыми. Согласно работам [15–17], псевдоэрмитовы операторы имеют либо действительные собственные значения, либо попарно комплексно-сопряженные.

Для свободного движения псевдоэрмитовы гамильтонианы уравнений (7), (9) можно привести к эрмитову виду и, следовательно, показать, что они имеют действительные собственные значения.

При наличии взаимодействия объединение уравнений Дирака с разными знаками перед неэрмитовым слагаемым с массой m_1 позволяет путем перехода к представлению Фолди–Ваутхайзена привести получающиеся псевдоэрмитовы гамильтонианы к эрмитову виду с действительным спектром собственных значений.

Для иллюстрации возможности применения гамильтониана уравнения (26) в решении задач квантовой теории поля рассмотрим простейшую проблему квантовой электродинамики о рассеянии электрона в кулоновском поле точечного ядра с зарядом $-Ze>0$.

В этом случае в (26) член с взаимодействием $q\alpha_\mu B^\mu$ представляет собой

$$-eA_0(x)=\frac{Ze^2}{4\pi|\mathbf{x}|}. \qquad (35)$$

В стандартном случае квантовой электродинамики (см., например, [19]) дифференциальное сечение рассеяния электрона равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{2Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}\sum_{\pm s_f,s_i}\left|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)\right|^2=$$

$$=\frac{2Z^2\alpha^2m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}Sp\left[\gamma^0\frac{(\hat{p}_i+m)}{2m}\gamma^0\frac{(\hat{p}_f+m)}{2m}\right]=$$

$$=\frac{Z^2\alpha^2}{2|\mathbf{q}|^4}Sp\left(\gamma^0\hat{p}_i\gamma^0\hat{p}_f+m^2\right). \qquad (36)$$

В (36) $\mathbf{q}=\mathbf{p}_f-\mathbf{p}_i$ – изменение импульса электрона при рассеянии; α – постоянная тонкой структуры; p_i, s_i, p_f, s_f – начальные (конечные) четырехимпульс и спин электрона.

В нашем случае, используя уравнения (26), (29) и соотношения (30)–(34), можно получить

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{2Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}Sp\left[\gamma^0\frac{(m_2-\tau_3\gamma^5m_1)\hat{p}_i+m^2}{2m^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2}(I\pm\tau_3)\gamma^0\frac{\hat{p}_f\left(m_2-\tau_3\gamma^5m_1\right)+m^2}{2m^2}\frac{1}{2}(I\pm\tau_3)\right]. \qquad (37)$$

В равенстве (37) вычисление следа матрицы должно производиться с использованием их восьмикомпонентной структуры. Однако проекционные операторы $\frac{1}{2}(I\pm\tau_3)$ фактически сводят эту операцию к определению Sp для четырехкомпонентных матриц.

С учетом этого замечания легко видеть, что выражения (36) и (37) совпадают друг с другом.

Очевидно, что с гамильтонианом (26) для случая, когда фермион находится на массовой поверхности $\left(p_5=\pm\sqrt{M^2+m^2}\right)$, можно определять и другие эффекты квантовой теории поля.

При этом по сравнению со стандартным подходом вместо массы m используются параметр $\tau_3\gamma^5m_1+m_2$ и соотношения (30)–(34). Конечные результаты совпадают со стандартными.

Случай, когда фермионы и бозоны находятся вне массовой поверхности, требует особого подхода и будет рассмотрен в последующей работе.

Таким образом, можно заключить, что для фермиона, находящегося на массовой поверхности $\left(p_5=\pm\sqrt{M^2-m^2}\right)$, введение в теорию предельной массы M не меняет конечных результатов, ранее полученных в стандартной квантовой теории, несмотря на изначальную неэрмитовость гамильтониана уравнения Дирака.

Список литературы

1. Markov M. A. Prog. Theor Phys. Suppl., Commemoration Issue for the Thirtieth Anniversary of Meson Theory and Dr. H. Yukawa, p. 85 (1965); Sov. Phys. JETP. 1967. Vol. 24. P. 584.

2. Kadyshevsky V. G. // Nucl. Phys. 1978. Vol. B141. P. 477; in Proceedings of International Integrative Conference on Group Theory and Mathematical Physics, Austin, Texas, 1978; Fermilab-Pub. 78/70-THY, Sept. 1978; Phys. Elem. Chast. Atom. Yadra. 1980. Vol. 11. P. 5.

3. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Phys. Lett. 1981. Vol. B106. P. 139.

4. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Nuovo Cimento. 1985. Vol. A87. P. 324.

5. Chizhov M. V., Donkov A. D. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Nuovo Cimento. 1985. Vol. A87. P. 350.

6. Chizhov M. V., Donkov A. D. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Nuovo Cimento. 1985. Vol. A87. P. 373.

7. Kadyshevsky V. G. // Phys. Part. Nucl. 1998. Vol. 29. P. 227.

8. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Rodionov V. N., Sorin A. S. Doklady Physics 51. P. 287. 2006, e-Print: hep-ph/0512332.

9. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Rodionov V. N., Sorin A. S. GERN-TH/2007-150, arxiv: 0708.4205v1, [hep-ph].

10. Garay L .J. // Internat. J. Modern Phys. 1995. Vol. A10. P. 145–165, gr-qc/9403008.

11. Gross D. J., Mende P. F. // Nuclear Phys. 1988. Vol. B 303. p. 407–454.

12. Maggioze M. A. // Phys. Lett. 1993. Vol. B 304. P. 65–69, hep-th/9301067

13. Bender C. M., Boettcher S. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 5243; Bender C. M. // Rept. Prog. Phys. 2007. Vol. 70. P. 947.

14. Dieudonné J. Proc. Of the Int. Symp. On Linear Spaces, Pergamon, Oxford, 115 (1961); Scholtz F. G., Geyer H. B. and Hahne F., Ann. Phys. 213, 74 (1992).

15. Froissart M. // Nuovo Cimento. 1959. Vol. 14. P. 197.

Sudarshan E. C. G. // Phys. Rev. 1961. Vol. 123. P. 2183;

Mostafazadeh A. // J. Math. 2002. Vol. 43. P. 2814.
16. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001; Wigner E. // J. Math Phys. 2004. Vol. 45. P. 585.
17. Mostafazadeh A. // J. Math Phys. 2002. Vol. 43. P. 205–214, 3944–3951.
18. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29.
19. Bjorken J. D., Drell S. D. Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill Book Company, 1964. (русский перевод: Релятивистская квантовая теория, М.: Наука, 1978).
20. Незнамов В. П. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1988. Вып. 2. С. 21; 1989. Вып. 1. С. 3; 1990. Вып. 1. С. 30; 2004. Вып. 1–2. С. 41;

hep-th/041150; Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37(1). С. 152 [Physics of Particles and Nuclei. Vol. 37(1). P. 86, Pleiadas Publishing, Inc (2006)].
21. Незнамов В. П., hep-th/0412047 (2005); hep-th/0804.0333 (2008);

arxiv: 0901.2413 [gen-ph], (2009); arxiv: 0901.2412 [gen-ph], (2009).

Незнамов В. П., Силенко А. Я. // J. Math Phys. 2009. Vol.50. P.122302-122317. arxiv: 0906.2069 v1 [math-ph], (2009).

Статья поступила в редакцию 11.01.2010