УДК 539.1.01

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ КЕРРА В ГАРМОНИЧЕСКИХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

М. В. Горбатенко*, Т. М. Горбатенко

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл., Россия

Работа содержит систематическое изложение процедуры нахождения приведенных в нашей публикации 2004 г. разложений для компонент метрики внешней части решения Керра в декартовых гармонических координатах. Процедура включает два координатных преобразования (от координат Бойера – Линдквиста к первичным и вторичным координатам Керра), нахождение гармонических координат путем решения условий де Дондера и переход от решения Керра во вторичных координатах Керра к записи в гармонических координатах. После этого выполняются достаточно трудоемкие вычисления, связанные с разложением компонент метрики по двум параметрам малости. Разложения могут быть использованы в задачах по применению метода Эйнштейна – Инфельда – Гоффманна, задачах по динамике движения частиц с полуцелым спином в гравитационном поле и т. д.

1. Введение

Точное решение аксиально симметричной стационарной задачи для уравнений общей теории относительности (ОТО) с нулевым тензором энергии-импульса было найдено Керром и приведено в [1]. Обычно это решение записывается в координатах Бойера – Линдквиста (см., например, [2]), однако известны записи решения Керра в так называемых координатах Керра, а также в гармонических координатах (см. [3]).

Точное решение Керра в различных формах его записи активно исследуется во многих проблемах астрофизики, космочастиц и т. д. Наряду с такими проблемами имеется несколько категорий задач, для решения которых необходимы не решения Керра в общем виде, а разложения этого решения в гармонических декартовых координатах, записанные в явном виде. К числу таких задач относится, например, задача о построении методом Эйнштейна – Инфельда – Гоффманна приближенного решения уравнения Эйнштейна для системы вращающихся тел путем разложений по параметрам малости и использования координатного условия де Дондера. Разложения решения Керра в гармонических декартовых координатах могут быть использованы при этом для калибровки приближенных выражений. Задача такого типа рассматривалась, например, в [4]. Еще один класс задач, для которых необходимы разложения решения Керра в гармонических декартовых координатах, это задачи о построении динамики частиц с полуцелым спином в гравитационном поле вращающихся тел (см., например, [5]).

Разложения компонент метрики для внешней части решения Керра в гармонических декартовых координатах в первом порядке малости известны сравнительно давно (см., например, [6]). В более высоких порядках малости разложения были приведены нами в [4]. Рамки журнальной публикации не позволили привести в [4] многие существенные детали достаточно трудоемких вычислений, связанных с получением указанных разложений. В данной работе мы сужаем круг рассматриваемых проблем по сравнению с [4], и это позволяет нам воспроизвести приведенные в [4] результаты подробно, обстоятельно и систематическим образом.

Как и в работе [4], исходными формулами для получения искомых разложений являются результаты [3] для внешней части решения Керра. В разделах 2, 3 мы выполняем соответствующие выкладки из [3] в "наших" обозначениях** (при этом изменяются сигнатура, обозначения некоторых величин и нумерация переменных). Это касается двух координатных преобразований (от координат Бойера – Линдквиста к первичным и вторичным координатам Керра), нахождения гармонических координат путем решения условий де Дондера и перехода от решения Керра во вторичных координатах Керра к записи в гармонических координатах. Такой "повтор" известных результатов в данной работе нам представляется уместным, поскольку унификация обозначений, во-первых, уменьшает риск

*E-mail: gorbatenko@vniief.ru.

**В данной работе, как и в [4], используются обозначения из известной монографии [7]; в частности, используется сигнатура $(-+++)$.

ошибок, во-вторых, позволяет установить связь окончательных формул с записью решения Керра в координатах Бойера – Линдквиста, в-третьих, упрощает получение (при необходимости) членов более высоких порядков разложений.

Основные результаты данной работы изложены в разделах 4 и 5. Результаты представляют собой разложения компонент метрики решения Керра по двум параметрам малости

$$u \equiv \frac{m}{R}, \quad v \equiv \frac{a}{R}, \tag{1}$$

существующим у этого решения. Здесь m – половина гравитационного радиуса тела, порождающего гравитационное поле, а a – приведенный угловой момент указанного тела. Напомним, что величина a связана с массой тела $\tilde{m}$ (г) и угловым моментом $\tilde{J}$ (г·см^2/с) соотношением

$$a = \tilde{J}/(\tilde{m}c). \tag{2}$$

Условиями справедливости полученных в разделах 4 и 5 разложений являются неравенства

$$u << 1, \quad v << 1. \tag{3}$$

Конкретные значения параметров u, v зависят как от исходных данных рассматриваемой задачи, так и от той области пространства, в которой решается задача. Что касается отношения параметров u, v друг к другу, то оно зависит только от $\tilde{m}$, $\tilde{J}$ и может быть любым положительным числом. С учетом этого можно утверждать, что относительные порядки малости отдельных членов разложения меняются от одной задачи к другой, поскольку они зависят от особенностей исходных данных в конкретной задаче.

Из чисто технических соображений удобно предположить (хотя и не обязательно), что между параметрами имеется определенная связь. Удобство связано с тем, что приняв какое-нибудь предположение о соотношении между параметрами u и v, мы получаем возможность оценивать порядки малости всех членов разложения в единой шкале малости. В качестве такого предположения можно использовать то предположение, которое зачастую принимается при рассмотрении задач о движении вращающихся тел. Это предположение сводится к тому, что параметр u имеет второй порядок малости, а параметр v – первый.

2. Решение Керра в координатах Керра

В координатах Бойера – Линдквиста, которые мы в данном пункте будем обозначать через

$$(t, \varphi, r, \theta), \tag{4}$$

метрический тензор для решения Керра в нашей сигнатуре $(-+++)$ имеет вид (см., например, [2]):

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1-\dfrac{2mr}{\rho^2}\right) & -\dfrac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & & \\ -\dfrac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & \left(r^2+a^2+\dfrac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta & & \\ & & \dfrac{\rho^2}{\Delta} & \\ & & & \rho^2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$g = -\rho^4 \sin^2\theta.$$

Обратный тензор равен:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\Delta}\left(r^2+a^2+\dfrac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right) & -\dfrac{2amr}{\Delta\rho^2} & & \\ -\dfrac{2amr}{\Delta\rho^2} & \dfrac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1-\dfrac{2mr}{\rho^2}\right) & & \\ & & \dfrac{\Delta}{\rho^2} & \\ & & & \dfrac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}\Delta &\equiv r^2 - 2mr + a^2\\ \rho^2 &\equiv r^2 + a^2\cos^2\theta\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Через m обозначается величина с размерностью длины, сконструированная из массы, гравитационной константы и скорости света, т. е. $m = \dfrac{\tilde{m}G}{c^2}$. Через a обозначается величина, имеющая размерность длины и равная моменту импульса, приходящегося на единицу массы, т. е. $a = \dfrac{\tilde{J}}{\tilde{m}c}$.

Делаем координатное преобразование

$$(t,\varphi,r,\theta) \Rightarrow (T,\Phi,r,\theta), \tag{8}$$

при этом

$$\left.\begin{aligned} dT &= dt + \frac{\left(r^2+a^2\right)}{\Delta}dr\\ d\Phi &= d\varphi + \frac{a}{\Delta}dr\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Легко проверить, что равенства

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial r};\quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

выполняются, т. е. соотношения (9) интегрируемы и (T,Φ,r,θ) являются голономными координатами.

В координатах (T,Φ,r,θ) метрика получается из метрики (5) стандартным образом и имеет вид:

$$g_{\alpha\beta} = \left|\begin{array}{c:c:c:c} -\left(1-\dfrac{2mr}{\rho^2}\right) & -\dfrac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & 1 & 0\\ \hdashline -\dfrac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & \left(r^2+a^2+\dfrac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta & -a\sin^2\theta & 0\\ \hdashline 1 & -a\sin^2\theta & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \rho^2\end{array}\right|. \tag{10}$$

Тензор, обратный к (10), имеет вид:

$$g^{\alpha\beta} = \left|\begin{array}{c:c:c:c} \dfrac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta & \dfrac{a}{\rho^2} & \dfrac{r^2+a^2}{\rho^2} & \\ \hdashline \dfrac{a}{\rho^2} & \dfrac{1}{\rho^2\sin^2\theta} & \dfrac{a}{\rho^2} & \\ \hdashline \dfrac{r^2+a^2}{\rho^2} & \dfrac{a}{\rho^2} & \dfrac{\Delta}{\rho^2} & \\ \hdashline & & & \dfrac{1}{\rho^2}\end{array}\right|. \tag{11}$$

Делаем еще одно координатное преобразование

$$(T,\Phi,r,\theta) \Rightarrow (t,\varphi,r,\theta). \tag{12}$$

Новая азимутальная координата φ связана со старой координатой Φ соотношением

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Phi - \operatorname{arctg}\left(\left(r-m\right)/a\right) - \frac{\pi}{2};\\ d\varphi &= d\Phi - \frac{a}{\left(\Delta+m^2\right)}dr.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В координатах (t,φ,r,θ) метрический тензор и обратный к нему имеют вид, приведенный ниже (далее координаты (t,φ,r,θ) будем называть вторичными координатами Керра, несмотря на то, что их обозначение совпадает с обозначением координат Бойера – Линдквиста).

$$g_{\alpha\beta}(t,\varphi,r,\theta)=\left[\begin{array}{c:c:c:c} -1+\frac{2mr}{\rho^2} & -\frac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & 1-\frac{2a^2mr\sin^2\theta}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \\ \hdashline -\frac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & \left(r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta & -a\sin^2\theta+\frac{a\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)}\left[r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right] & \\ \hdashline 1-\frac{2a^2mr\sin^2\theta}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & -a\sin^2\theta+\frac{a\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)}\left[r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right] & -\frac{2a^2\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)}+\frac{a^2\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)^2}\left[r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right] & \\ \hdashline & & & \rho^2 \end{array}\right] \tag{14}$$

$$g^{\alpha\beta}(t,\varphi,r,\theta)=\left[\begin{array}{c:c:c:c} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\frac{am(2r-m)}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \frac{\left(r^2+a^2\right)}{\rho^2} & \\ \hdashline -\frac{am(2r-m)}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}-\frac{2a^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)}+\frac{\Delta a^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)^2} & \frac{am^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \\ \hdashline \frac{\left(r^2+a^2\right)}{\rho^2} & \frac{am^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \frac{\Delta}{\rho^2} & \\ \hdashline & & & \frac{1}{\rho^2} \end{array}\right]. \tag{15}$$

3. Переход от координат Керра к г оническим координатам

Гармонические координаты обозначаем как

$$\left\{x^{\alpha}\right\} \equiv \left(x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}\right) \equiv \left(x^{0}, x, y, z\right). \tag{16}$$

Для вторичных координат Керра выше мы договорились использовать обозначение (t, φ, r, θ). В последующем иногда будет удобно обозначать их как

$$\left\{y^{\alpha}\right\} \equiv \left(y^{0}, y^{1}, y^{2}, y^{3}\right) = \left(t, \varphi, r, \theta\right). \tag{17}$$

При нахождении координат (16) будем следовать алгоритму, изложенному в [3].

Пусть $f(y) = f(t, \varphi, r, \theta)$ – одна из четырех гармонических координат. Условия на отыскание системы независимых решений имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\left(\sqrt{-g(y)}\; g^{\mu\nu}(y)\frac{\partial f(y)}{\partial y^{\nu}}\right) = 0. \tag{18}$$

Используя (15), приводим явный вид уравнений (18):

$$\left.\begin{aligned} & a^2\sin^3\theta\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2\frac{am(2r-m)\sin\theta}{(\Delta+m^2)}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\varphi} + 2\sin\theta(r^2+a^2)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial r} + \left[\frac{1}{\sin\theta} - \frac{2a^2\sin\theta}{(\Delta+m^2)} + \frac{\Delta a^2\sin\theta}{(\Delta+m^2)^2}\right]\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \\ & + 2\frac{am^2\sin\theta}{(\Delta+m^2)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + 2r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{2am^2\sin\theta(r-m)}{(\Delta+m^2)^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Решения уравнений (19) найдены в [3]. Приводим их применительно к случаю, когда $a > m$:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= t - r - m\ln\left(\Delta\right) + \frac{\text{const}}{\sqrt{a^2-m^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{r-m}{\sqrt{a^2-m^2}}\right); \\ x^1 &= \sqrt{\Delta+m^2}\;\sin\theta\cos\varphi; \\ x^2 &= \sqrt{\Delta+m^2}\;\sin\theta\sin\varphi; \\ x^3 &= \left(r-m\right)\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Константу интегрирования, входящую в (20), полагаем равной $\text{const} = -2m^2$ (как и в [3]). После этого получаем:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= t - r - m\ln\left(\Delta\right) - \frac{2m^2}{\sqrt{a^2-m^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{r-m}{\sqrt{a^2-m^2}}\right); \\ x^1 &= \sqrt{\Delta+m^2}\;\sin\theta\cos\varphi; \\ x^2 &= \sqrt{\Delta+m^2}\;\sin\theta\sin\varphi; \\ x^3 &= \left(r-m\right)\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Расстояние точки от начала координат определяется в гармонических координатах соотношением

$$R \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \tag{22}$$

Из (22) и (20) следует, что

$$R^2 = (r-m)^2 + a^2\sin^2\theta. \tag{23}$$

Якобиан преобразования (21) равен:

$$J \equiv \frac{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)}{\partial\left(t, \varphi, r, \theta\right)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1-\dfrac{2mr}{\Delta} & 0 \\ \hline 0 & -\sqrt{\Delta+m^2}\sin\theta\sin\varphi & \dfrac{(r-m)}{\sqrt{\Delta+m^2}}\sin\theta\cos\varphi & \sqrt{\Delta+m^2}\;\cos\theta\cos\varphi \\ \hline 0 & \sqrt{\Delta+m^2}\sin\theta\cos\varphi & \dfrac{(r-m)}{\sqrt{\Delta+m^2}}\sin\theta\sin\varphi & \sqrt{\Delta+m^2}\;\cos\theta\sin\varphi \\ \hline 0 & 0 & \cos\theta & -(r-m)\sin\theta \\ \hline \end{array}. \tag{24}$$

Детерминант преобразования (24) равен

$$\det(J) = \sin\theta\{\Delta + m^2 - a^2\sin^2\theta\}. \tag{25}$$

Обратная матрица координатных преобразований имеет вид:

$$J^{-1} \equiv \frac{\partial(t,\varphi,r,\theta)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)} = \left|\begin{array}{c:c:c:c} 1 & \dfrac{\sqrt{\Delta+m^2}\,(r-m)\left(r^2+a^2\right)\sin\theta\cos\varphi}{\Delta\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} & \dfrac{\sqrt{\Delta+m^2}\,(r-m)\left(r^2+a^2\right)\sin\theta\sin\varphi}{\Delta\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} & \dfrac{\left(\Delta+m^2\right)\left(r^2+a^2\right)\cos\theta}{\Delta\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} \\ \hdashline 0 & -\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{\Delta+m^2}\,\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{\Delta+m^2}\,\sin\theta} & 0 \\ \hdashline 0 & \dfrac{\sqrt{\Delta+m^2}\,(r-m)\sin\theta\cos\varphi}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} & \dfrac{\sqrt{\Delta+m^2}\,(r-m)\sin\theta\sin\varphi}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} & \dfrac{\left(\Delta+m^2\right)\cos\theta}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} \\ \hdashline 0 & \dfrac{\sqrt{\Delta+m^2}\,\cos\theta\cos\varphi}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} & \dfrac{\sqrt{\Delta+m^2}\,\cos\theta\sin\varphi}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} & -\dfrac{(r-m)\sin\theta}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)} \end{array}\right| . \tag{26}$$

$$\det\left(J^{-1}\right) = \frac{1}{\sin\theta\left\{\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right\}}. \tag{27}$$

Во вторичных координатах Керра (t,φ,r,θ) решение Керра (метрический тензор и обратный к нему) имеет вид, приведенный ниже

$$g_{\alpha\beta}(t,\varphi,r,\theta)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1+\frac{2mr}{\rho^2} & -\frac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & 1-\frac{2a^2mr\sin^2\theta}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \\ \hline -\frac{2amr}{\rho^2}\sin^2\theta & \left(r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta & -a\sin^2\theta+\frac{a\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)}\left[r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right] & \\ \hline 1-\frac{2a^2mr\sin^2\theta}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & -a\sin^2\theta+\frac{a\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)}\left[r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right] & -\frac{2a^2\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)}+\frac{a^2\sin^2\theta}{\left(\Delta+m^2\right)^2}\left[r^2+a^2+\frac{2a^2mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right] & \\ \hline & & & \rho^2 \\ \hline\end{array} \tag{28}$$

$$\sqrt{-g(t,\varphi,r,\theta)}=\frac{\rho^2}{\left(\Delta+m^2-a^2\sin^2\theta\right)}, \tag{29}$$

$$g^{\alpha\beta}(t,\varphi,r,\theta)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\frac{am(2r-m)}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \frac{\left(r^2+a^2\right)}{\rho^2} & \\ \hline -\frac{am(2r-m)}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}-\frac{2a^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)}+\frac{\Delta a^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)^2} & \frac{am^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \\ \hline \frac{\left(r^2+a^2\right)}{\rho^2} & \frac{am^2}{\rho^2\left(\Delta+m^2\right)} & \frac{\Delta}{\rho^2} & \\ \hline & & & \frac{1}{\rho^2} \\ \hline\end{array}. \tag{30}$$

Метрический тензор с верхними индексами для решения Керра в гармонических координатах имеет следующий вид:

$$g^{\alpha\beta}(x) =$$

$\dfrac{-\left(a^2+r^2\right)^2+\Delta a^2\sin^2\theta}{\Delta\rho^2}$	$\dfrac{2amr\sin\theta\sin\varphi}{\Delta\rho^2}\sqrt{\Delta+m^2}$
$\dfrac{2amr\sin\theta\sin\varphi}{\Delta\rho^2}\sqrt{\Delta+m^2}$	$\dfrac{1}{2\rho^2\left(\Delta+m^2\right)}\Big\{2\left(\Delta+m^2\right)^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\Delta(r-m)^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+2am^2(r-m)\sin^2\theta\sin2\varphi+$ $+\left[a^2\left(\Delta+2m^2\right)\cos2\theta+a^4+2(r-m)^4+a^2\left(2m^2-6mr+3r^2\right)\right]\sin^2\varphi\Big\}$
$\dfrac{2amr\sin\theta\cos\varphi}{\Delta\rho^2}\sqrt{\Delta+m^2}$	$-\dfrac{m^2\sin^2\theta}{2\rho^2\left(\Delta+m^2\right)}\left[-2a(r-m)\cos2\varphi+\left((r-m)^2-a^2\right)\sin2\varphi\right]$
0	$-\dfrac{m^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2\sqrt{\Delta+m^2}}\left[(r-m)\cos\varphi+a\sin\varphi\right]$

$\dfrac{2amr\sin\theta\cos\varphi}{\Delta\rho^2}\sqrt{\Delta+m^2}$	0
$-\dfrac{m^2\sin^2\theta}{2\rho^2\left(\Delta+m^2\right)}\left[-2a(r-m)\cos2\varphi+\left((r-m)^2-a^2\right)\sin2\varphi\right]$	$-\dfrac{m^2\sin\theta\cos\theta\left[(r-m)\cos\varphi+a\sin\varphi\right]}{\rho^2\sqrt{\Delta+m^2}}$
$\dfrac{1}{2\rho^2\left(\Delta+m^2\right)}\Big\{2\left(\Delta+m^2\right)^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+2\Delta(r-m)^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+2am^2(r-m)\sin^2\theta\sin2\varphi+$ $+\left[a^2\left(\Delta+2m^2\right)\cos2\theta+a^4+2(r-m)^4+a^2\left(2m^2-6mr+3r^2\right)\right]\cos^2\varphi\Big\}$	$-\dfrac{m^2\sin\theta\cos\theta\left[(r-m)\sin\varphi-a\cos\varphi\right]}{\rho^2\sqrt{\Delta+m^2}}$
$-\dfrac{m^2\sin\theta\cos\theta\left[(r-m)\sin\varphi-a\cos\varphi\right]}{\rho^2\sqrt{\Delta+m^2}}$	$\dfrac{a^2+m^2-4mr+2r^2+\left(a^2-m^2\right)\cos2\theta}{2\rho^2}$

. (31)

Приведенные выше выражения для

- якобиана обратного преобразования (26),
- метрического тензора с верхними индексами для решения Керра во вторичных координатах Керра (30),
- $\sqrt{-g}$ (29).

позволяют проверить прямым вычислением выполнимость условий де Дондера. Расчетной формулой для проверки условия де Дондера является формула

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g(y)}\; g^{\lambda\alpha}(y)\right)}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=0, \tag{32}$$

непосредственно вытекающая из (18).

Обратим внимание на то, что выражение (31) является выражением для метрического тензора решения Керра в гармонических координатах, хотя и записано в терминах величин (t,φ,r,θ). С помощью формул (20) находим явный вид преобразования от гармонических координат $\left\{x^{\alpha}\right\}\equiv\left(x^{0},x^{1},x^{2},x^{3}\right)\equiv\left(x^{0},x,y,z\right)$ к вторичным координатам Керра (t,φ,r,θ):

$$\left.\begin{aligned}
&t=x^{0}+r+m\ln(\Delta)+\frac{2m^{2}}{\sqrt{a^{2}-m^{2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{r-m}{\sqrt{a^{2}-m^{2}}}\right);\\
&\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{R^{2}}{2a^{2}}+\frac{R^{2}}{2a^{2}}\sqrt{1-2\frac{a^{2}}{R^{2}}+\frac{a^{4}}{R^{4}}+4\frac{a^{2}z^{2}}{R^{4}}}};\\
&\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x};\\
&r=m+R\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{a^{2}}{2R^{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1-2\frac{a^{2}}{R^{2}}+\frac{a^{4}}{R^{4}}+4\frac{a^{2}z^{2}}{R^{4}}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

С помощью соотношений (33) метрический (31) может быть записан в терминах гармонических координат $\left(x^{0},x,y,z\right)$. Поскольку решение является стационарным, то выражение для координаты t не потребуется.

Нахождение компонент метрики с нижними индексами $g_{\alpha\beta}(x)$, а также компонент величины $\gamma_{\alpha\beta}$ по приведенным выше компонентам метрики $g^{\alpha\beta}(x)$ не представляет принципиальных трудностей. Однако эти операции достаточно громоздкие; мы не будем приводить здесь явный вид точных выражений для $g_{\alpha\beta}(x)$ и $\gamma_{\alpha\beta}$.

4. Разложения величин $\gamma_{\alpha\beta}$ в сферических координатах

Безразмерными параметрами малости в рассматриваемой задаче являются параметры u и v, определенные соотношениями (1). Для последующего удобно предположить, что параметр u имеет второй порядок малости, а параметр v – первый. Как отмечено в разделе 1, такое соотношение между параметрами малости обычно используется при рассмотрении задач о движении спиновых частиц в гравитационном поле. Приняв такое предположение, мы можем сказать, что приводимые разложения справедливы до 6-го порядка малости.

Прежде чем переходить непосредственно к процедуре разложения различных величин, обратим внимание на два обстоятельства.

- Параметры малости (1) определяются через расстояние R в гармонической системе координат.
- Если ввести полярный угол ϑ в гармонической системе координат с помощью соотношения $\cos\vartheta=\dfrac{z}{R}$, то оказывается, что углы θ и ϑ не тождественны друг другу. Связь между $\cos\theta$ и $\cos\vartheta$, которая следует из (33), имеет вид:

$$\cos^{2}\theta=\cos^{2}\vartheta\left[1-\frac{a^{2}}{R^{2}}\cos^{2}\vartheta+\ldots\right]. \tag{34}$$

Приведем соотношения, которые потребуются при записи разложений величин $\gamma_{\alpha\beta}$ и которые следуют из (1), (21) и (23):

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\sin\varphi &= \frac{y}{R}\left[1-\frac{v^2}{2}\cos^2\vartheta\right] = \sin\vartheta\sin\phi\left[1-\frac{v^2}{2}\cos^2\vartheta\right], \\ \sin\theta\cos\varphi &= \frac{x}{R}\left[1-\frac{v^2}{2}\cos^2\vartheta\right] = \sin\vartheta\cos\phi\left[1-\frac{v^2}{2}\cos^2\vartheta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Ради простоты гармонические координаты R, ϑ, ϕ впредь будем обозначать через $r, \theta, \varphi.$ В этом случае связь декартовых гармонических координат со сферическими гармоническими координатами имеет стандартный вид:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r\sin\theta\cos\varphi; \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\varphi; \\ x^3 &= r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Сначала приведем в явном виде несколько членов разложения величин $\gamma_{\alpha\beta}$ по параметрам малости (1). Выражения для γ_{00} выписываем с точностью до членов четвертого порядка приближения, а выражения для γ_{0k}, γ_{mn} с точностью до пятого:

$$\gamma_{00} = 4u - \left(1+3\cos(2\vartheta)\right)v^2u + u^2 + \ldots \tag{37}$$

$$\gamma_{01} = 2\sin\vartheta\sin\phi\cdot vu - \left(5\cos^2\vartheta - 1\right)\sin\vartheta\sin\phi\cdot v^3u - 2\cdot\sin\vartheta\sin\phi\cdot vu^2 + \ldots \tag{38}$$

$$\gamma_{02} = -2\sin\vartheta\cos\phi\cdot vu + \left(5\cos^2\vartheta - 1\right)\sin\vartheta\cos\phi\cdot v^3u + 2\cdot\sin\vartheta\cos\phi\cdot vu^2 + \ldots \tag{39}$$

$$\gamma_{03} = 0. \tag{40}$$

$$\gamma_{11} = \left[\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2\right]u^2 + \sin^2\theta\sin(2\varphi)vu^2 + \ldots \tag{41}$$

$$\gamma_{22} = \left[\sin^2\theta\sin^2\varphi - 2\right]u^2 - \sin^2\theta\sin(2\varphi)vu^2 + \ldots \tag{42}$$

$$\gamma_{33} = \left[\cos^2\theta - 2\right]u^2 + \ldots \tag{43}$$

$$\gamma_{12} = \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cdot u^2 - \sin^2\theta\cos(2\varphi)vu^2 + \ldots \tag{44}$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos\varphi\cdot u^2 + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\sin\varphi\cdot vu^2 + \ldots \tag{45}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\sin\varphi\cdot u^2 - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos\varphi\cdot vu^2 + \ldots \tag{46}$$

Выражения для $\gamma_{\alpha\beta}$ совпадают с соответствующими выражениями в решении Шварцшильда в случае, когда величина a полагается равной нулю. В этом случае

$$\gamma_{00} = 4u + u^2 + 2u^3; \quad \gamma_{01} = 0; \quad \gamma_{02} = 0; \quad \gamma_{03} = 0;$$

$$\gamma_{11} = \left[\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2\right]u^2 + 2\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot u^3;$$

$$\gamma_{22} = \left[\sin^2\theta\sin^2\varphi - 2\right]u^2 + 2\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot u^3; \quad \gamma_{33} = \left[\cos^2\theta - 2\right]u^2 + 2\cos^2\theta\cdot u^3;$$

$$\gamma_{12} = \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cdot u^2 + \sin^2\theta\sin(2\varphi)u^3; \quad \gamma_{13} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos\varphi\cdot u^2 + \sin(2\theta)\cos\varphi\cdot u^3;$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\sin\varphi\cdot u^2 + \sin(2\theta)\sin\varphi\cdot u^3.$$

5. Разложения величин $\gamma_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$ в декартовых координатах

Тензор собственного углового момента:

$$S_{mn} = \varepsilon_{mnc} S_c; \quad S_c = \frac{1}{2}\varepsilon_{cab} S_{ab};$$
$$S_{12} = a; \quad S_{23} = S_{31} = 0; \quad S_1 = S_2 = 0; \quad S_3 = a. \tag{47}$$

Из (47) следует, что единица и $\cos^2\theta$ могут быть заменены следующим образом:

$$1 = \frac{(S_c S_c)}{a^2}, \tag{48}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(S_a x_a)(S_b x_b)}{a^2 r^2}. \tag{49}$$

Выражение (37) для γ_{00} в декартовых координатах записываем в следующем виде:

$$\gamma_{00} = 4u + u^2 - 6\frac{S_a S_b}{a^2}\left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ab}\right) v^2 u + \ldots = 4\frac{m}{r} + \frac{m^2}{r^2} - 6\frac{m}{r^3} S_a S_b \left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ab}\right) + \ldots \tag{50}$$

Выражения (38), (39), (40) для $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}$ в декартовых координатах записываются в следующем виде:

$$\gamma_{0k} = 2\frac{m(S_{ka} x_a)}{r^3} - 2\frac{m^2(S_{ka} x_a)}{r^4} - 5\frac{m(S_{kc} x_c)(S_a x_a)(S_b x_b)}{r^7} + \frac{m(S_{ka} x_a)}{r^5}(S_a S_a) + \ldots \tag{51}$$

Выражения (41)–(46) для $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ в декартовых координатах записываются в следующем виде:

$$\gamma_{mn} = \frac{m^2 x_m x_n}{r^4} - 2\frac{m^2}{r^2}\delta_{mn} + \frac{m^2\left[(S_{mc} x_c) x_n + (S_{nc} x_c) x_m\right]}{r^5} + \ldots \tag{52}$$

Соотношения (50), (51), (52) совпадают с соответствующими соотношениями в работе [4].

Компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ связаны с фоновой метрикой в декартовых координатах $\eta_{\alpha\beta}$ и с величинами $h_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}; \quad h_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}\right); \quad \gamma_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\right);$$
$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}\right). \tag{53}$$

Запишем соотношения (53) для компонент метрики g_{00}, g_{0k}, g_{mn}:

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{1}{2}(\gamma_{00} + \gamma_{ll}); \\ g_{0k} &= \gamma_{0k}; \\ g_{mn} &= \delta_{mn} + \gamma_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn}(-\gamma_{00} + \gamma_{ll}). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Соотношения (54) в терминах величины h_{00}, h_{0k}, h_{mn}:

$$\left.\begin{aligned} h_{00} &= \frac{1}{2}(\gamma_{00} + \gamma_{ll}); \\ h_{0k} &= \gamma_{0k}; \\ h_{mn} &= \gamma_{mn} - \frac{1}{2}\delta_{mn}(-\gamma_{00} + \gamma_{ll}). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Подставляем выражения (50), (51), (52) для γ_{00}, γ_{0k}, γ_{mn} в (55) и находим искомые разложения величин h_{00}, h_{0k}, h_{mn} :

$$h_{00} = 2\frac{m}{r} - 2\frac{m^2}{r^2} - 3\frac{m}{r^3} S_a S_b \left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ab} \right) + \dots, \tag{56}$$

$$h_{0k} = 2\frac{m(S_{ka}x_a)}{r^3} - 2\frac{m^2(S_{ka}x_a)}{r^4} - 5\frac{m(S_{kc}x_c)(S_a x_a)(S_b x_b)}{r^7} + \frac{m(S_{ka}x_a)}{r^5}(S_a S_a) + \dots, \tag{57}$$

$$h_{mn} = \frac{m^2 x_m x_n}{r^4} + \frac{m^2}{r^2}\delta_{mn} + \frac{m^2\left[(S_{mc}x_c)x_n + (S_{nc}x_c)x_m\right]}{r^5} + 2\frac{m}{r}\delta_{mn} - 3\frac{m}{r^3} S_a S_b \left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ab} \right)\delta_{mn} + \dots \tag{58}$$

В низшем порядке разложения (56), (57), (58) принимают тот вид, который использовался в работе [6] и во многих других работах, связанных с решением Керра, а именно:

$$h_{00} = 2\frac{m}{r}; \quad h_{0k} = 2\frac{m(S_{ka}x_a)}{r^3}; \quad h_{mn} = 2\frac{m}{r}\delta_{mn}. \tag{59}$$

Заключение

Данная работа содержит систематическое изложение процедуры нахождения приведенных в публикации авторов в ТМФ [4] разложений для компонент метрики внешней части решения Керра в декартовых гармонических координатах. Эти разложения имеют вид (56)–(58). В низшем порядке малости полученные выражения переходят в соотношения (59), которые были получены давно и приведены, например, в работе [6]. Новизна результатов данной работы состоит в том, что разложения (56)–(58) получены, во-первых, систематическим образом, во-вторых, в более высоких порядках малости.

Безразмерными параметрами малости в приведенных разложениях являются параметры u и v, определенные соотношениями (1). Эти параметры независимы, и соотношения между ними определяются условиями задачи. Если предположить (как это часто делается в работах по методу ЭИГ), что параметр u имеет второй порядок малости, а параметр v – первый, то разложения (56)–(58) дают выражения для компонент метрики до 6-го порядка малости включительно.

Точное решение Керра, как известно, является объектом исследования во многих проблемах астрофизики. Но имеются задачи, для решения которых необходимы не решения Керра в общем виде, а разложения этого решения в гармонических декартовых координатах, записанные в явном виде. Например, разложения указанного типа могут быть использованы в задачах:

- по применению метода Эйнштейна – Инфельда – Гоффманна;
- по динамике движения частиц с полуцелым спином в гравитационном поле.

По-видимому, в задачах такого типа и могут найти применение полученные в данной работе разложения (56)–(58).

В заключение заметим, что трудоемкие вычисления, результаты которых приведены в работе, вряд ли могли быть выполнены вручную. В ряде случаев для выполнения аналитических преобразований авторы прибегали к помощи математического комплекса Mathematica (вычисление якобианов координатных преобразований и компонент метрического тензора при координатных преобразованиях, нахождение разложений громоздких выражений по двум параметрам малости и др.). Вручную выполнялись лишь отдельные операции по контролю правильности компьютерных вычислений. Такого рода "комбинированные" приемы вычислений, по-видимому, могут быть использованы и при проведении других трудоемких аналитических компьютерных расчетов как в области гравитации, так и за ее пределами (в квантовой теории поля, в хромодинамике и в других разделах физики).

Авторы выражают благодарность В. П. Незнамову за стимулирующие дискуссии.

Список литературы

1. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. Власов А. А., Логунов А. А. // ТМФ. 1987. Vol. 70. P. 171. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

4. Горбатенко М. В., Горбатенко Т. М. Можно ли решение Керра найти методом Эйнштейна – Инфельда – Гоффмана? // ТМФ. 2004. Т. 140, № 1. С. 160. [Can the Kerr Solution Be Found by the Einstein-Infeld-Hoffmann Method? Theoretical and Mathematical Physics. 2004. Vol. 140, Issue 1. P. 1028.]

5. Obukhov Y. N., Silenko A. J., Teryaev O. V. Spin dynamics in gravitational fields of rotating bodies and the equivalence principle. E-print arXiv:0907.4367v1[gr-qc.]

6. Weinberg S. Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons. Hoboken. 1972. [Вейнберг С. Гравитация и космология. Изд. Платон, 2000.]

7. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation. W. H. Freeman, San Francisco, 1973. [Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977.]

Статья поступила в редакцию 19.03.2010