УДК 530.145

# СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА В ПСЕВДОЭРМИТОВОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С МАКСИМАЛЬНЫМ МАССОВЫМ ПАРАМЕТРОМ *M*

**В. П. Незнамов**

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

На основе модели квантовой теории поля с максимальным массовым параметром $M$, развитой В. Г. Кадышевским с сотрудниками, в рамках псевдоэрмитовой квантовой электродинамики во втором порядке теории возмущений рассчитана собственная энергия (собственная масса) электрона. В теории из-за наличия универсальной массы $M$ возникает естественное обрезание больших передаваемых импульсов в промежуточных состояниях. В результате собственная масса электрона оказывается конечной и зависящей от максимального передаваемого импульса $k_{\max} = AMf(\mathbf{p}), \left(\frac{M}{m} >> 1,\ A << \frac{M}{m},\ f(\mathbf{p}) << \frac{M}{m}\right)$. При определенных значениях $M$ и $A$ возможны две интерпретации полученных результатов. Первая трактовка позволяет количественно подтвердить старую идею об источниках массы элементарных частиц, обусловленных взаимодействиями частиц с собственными калибровочными полями. Вторая трактовка приводит к возможности не производить процедуру перенормировки массы (по крайней мере, во втором порядке теории возмущений) из-за нулевого значения массового оператора $\sum(p)$.

## Введение

В работах [1–8] В. Г. Кадышевский с сотрудниками развил идеи М. А. Маркова [9] о существовании максимальной массы элементарных частиц $M$. В этих работах существование массы $M$ понимается как новый фундаментальный принцип Природы, который подобен релятивистским и квантовым постулатам, лежащим в основах квантовой теории поля.

Условие конечности спектра масс элементарных частиц достигается введением соотношения

$$m \le M, \tag{1}$$

где массовый параметр $M$ является новой физической константой. У М. А. Маркова в работе [9]

$$M \cong m_{planck} = 10^{19}\ \text{ГэВ}.$$

В работах [1–8] на основе соотношения (1) развита новая концепция локальной квантовой теории с построением соответствующих лагранжианов для бозонных и фермионных полей. Выполнение соотношения (1) достигается введением пятимерного пространства анти Де Ситтера (anti de Sitter space) подобно тому, как для выполнения релятивистских условий в свое время потребовался переход от трехмерного пространства к четырехмерному пространству – времени Минковского.

В импульсном пространстве анти Де Ситтера аналог релятивистского соотношения между энергией и импульсом частицы с выполнением условия (1) записывается в виде

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 + p_5^2 = M^2. \tag{2}$$

На массовой поверхности для частиц массой $m$ выполняется соотношение $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ и очевидно выполнение равенства

$$p_5^2 = M^2 - m^2. \tag{3}$$

В работе автора [10] исследовались свойства уравнения Дирака для фермиона с массой $m$, находящегося на массовой поверхности $p_5 = \pm\sqrt{M^2 - m^2}$. Показано, что свободный гамильтониан и гамильтониан с взаимодействием являются псевдоэрмитовыми. При введении соответствующих правил обращения с псевдоэрмитовыми гамильтонианами [11–13] можно построить последовательную квантовую теорию с конечными результатами, совпадающими с результатами при использовании обычного уравнения Дирака.

В случае взаимодействия дираковской частицы с бозонными полями для обеспечения условия псевдоэрмитовости в [10] введены восьмикомпонентные спиноры с четырьмя верхними и четырьмя нижними компонентами, являющимися соответственно решениями четырехкомпонентного уравнения Дирака с разными знаками перед неэрмитовым слагаемым с массой $m_1$.

В настоящей работе в рамках квантовой электродинамики на основе модели с максимальным массовым параметром $M$ в нижайшем порядке теории возмущений рассчитывается собственная энергия электрона, которая оказывается конечной и зависящей от верхнего предела интегрирования $k_{\max} = AMf(\mathbf{p})$, $\left(\frac{M}{m} >> 1,\ A << \frac{M}{m},\ f(\mathbf{p}) << \frac{M}{m}\right)$.

При определенных значениях $M$ и $A$ возможны две интерпретации полученных результатов.

Первая трактовка позволяет количественно подтвердить старую идею об источниках массы элементарных частиц, обусловленных взаимодействиями частиц с собственными калибровочными полями.

Вторая трактовка приводит к возможности не производить процедуру перенормировки массы (по крайней мере во втором порядке теории возмущений) из-за нулевого значения массового оператора $\Sigma(p)$.

В первом разделе приводятся используемый далее гамильтониан уравнения Дирака в пятимерном пространстве анти Де Ситтера, базисные функции свободного движения дираковской частицы с условиями их ортонормированности и полноты. Во втором и третьем разделах определены фотонный и электрон-позитронный пропагаторы. В четвертом разделе производится вычисление конечной собственной энергии электрона. В заключительном разделе проводится обсуждение полученных результатов.

## 1. Гамильтонова форма уравнения Дирака с электромагнитным взаимодействием в пространстве анти Де Ситтера. Базисные функции свободного движении

В соответствии с [8, 10] в импульсном пространстве анти Де Ситтера можно записать четыре уравнения Дирака с электромагнитным взаимодействием и с использованием максимальной массы $M$:

$$\begin{cases} p_0\psi_1(p,p_5) = (\alpha\mathbf{p} + \beta\gamma_5(M-|p_5|) + \\ + \beta 2M\sin\frac{\mu}{2} + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p,p_5))\psi_1(p,p_5); \\ p_0\psi_2(p,p_5) = (\alpha\mathbf{p} + \beta\gamma_5(M-|p_5|) - \\ - \beta 2M\sin\frac{\mu}{2} + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p,p_5))\psi_2(p,p_5); \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0\psi_3(p,p_5) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \beta\gamma_5(M-|p_5|) + \\ + \beta 2M\sin\frac{\mu}{2} + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p,p_5))\psi_3(p,p_5); \\ p_0\psi_4(p,p_5) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \beta\gamma_5(M-|p_5|) - \\ - \beta 2M\sin\frac{\mu}{2} + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p,p_5))\psi_4(p,p_5). \end{cases} \quad (4)$$

В уравнениях (4) и ниже $\hbar = c = 1$, $p^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$; $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ – четырехмерные матрицы Дирака; угол $\mu$ определяется соотношением $\cos\mu = \sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}$, где $m$ – масса дираковской частицы, $\alpha^\nu = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ \alpha^i, & \nu = i = 1,2,3 \end{cases}$; $\mathcal{A}^\nu(p,p_5)$ – интегральные выражения, представляющие электромагнитные потенциалы $A^\nu(x_0,\mathbf{x})$ в пространстве анти Де Ситтера. В уравнениях (4) выбрана калибровка $\mathcal{A}_5 = 0$ [6, 9]; в первых двух уравнениях (4) $p_5 = -|p_5|$, в уравнениях для $\psi_3$ и $\psi_4$ – $p_5 = |p_5|$.

Уравнения (4) отличаются между собой знаками перед слагаемыми с матрицами $\beta\gamma_5$ и $\beta$. По физическим следствиям уравнения (4) эквивалентны друг другу по аналогии с обычными уравнениями Дирака с разными знаками перед слагаемым с массой $m$.

В случае, если частица находится на массовой поверхности $\left(p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2\right)$, то $|p_5| = \sqrt{M^2 - m^2}$ и $M - |p_5| = = m_1 = 2M\sin^2\frac{\mu}{2}$. Вводя обозначение $m_2 = 2M\sin\frac{\mu}{2}$, получаем $m_2^2 - m_1^2 = m^2$.

Для случая $m << M$ масса $m_2 \approx m\left(1 + \frac{1}{8}\frac{m_2}{M^2}\right)$ близка к массе частицы, а $m_1 \approx m\frac{m}{2M}$ является малой величиной.

Из уравнений (4) видно, что их гамильтонианы неэрмитовы из-за наличия слагаемых с матрицами $\beta\gamma_5$. Можно показать, что объединение двух уравнений с разными знаками перед неэрмитовыми слагаемыми приводит к псевдоэрмитовости такого объединенного гамильтониана [10].

Псевдоэрмитовость гамильтониана позволяет работать с ним в рамках формализма неэрмитовой квантовой механики [11–13].

Рассмотрим из уравнений (4) два уравнения для $\psi_1(p,p_5)$ и $\psi_3(p,p_5)$

$$\begin{cases} p_0\psi_1(p,p_5) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta\gamma_5(M-|p_5|) + \beta m_2 + \\ \quad + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p,p_5))\psi_1(p,p_5);\ p_5 = -|p_5|; \\ p_0\psi_3(p,p_5) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \beta\gamma_5(M-|p_5|) + \beta m_2 + \\ \quad + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p,p_5))\psi_3(p,p_5);\ p_5 = |p_5|. \end{cases} \quad (5)$$

Введем восьмикомпонентный спинор $\phi(p,p_5)$ с четырьмя верхними компонентами, являющимися решением уравнения (5) для $\psi_1(p,p_5)$ и с четырьмя нижними компонентами – решениями уравнения (5) для $\psi_3(p,p_5)$:

$$\phi(p,p_5) = \begin{pmatrix} \psi_1(p,p_5) \\ \psi_3(p,p_5) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Введем также изотопические матрицы $\tau_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ и $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, действующие в изотопическом пространстве четырех верхних и четырех нижних компонентов спинора $\phi(p, p_5)$.

Теперь уравнения (5) можно записать в виде

$$p_0\phi(p, p_5) = \Big(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_3\beta\gamma^5\left(M - |p_5|\right) + \beta m_2 + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p, p_5)\Big)\phi(p, p_5). \qquad (7)$$

В уравнении (7) содержатся две ветви возможных значений $p_5 = \pm|p_5|$.

Условие псевдоэрмитовости $\rho H \rho^{-1} = H^\dagger$ для нашего случая можно записать, используя $\rho = \tau_1 = \tau_1^{-1}$.

Действительно

$$\tau_1 H_\phi \tau_1 = \tau_1\Big(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_3\beta\gamma_5\left(M - |p_5|\right) + \beta m_2 + \alpha_\nu \mathcal{A}^\nu(p, p_5)\Big)\tau_1 = H_\phi^\dagger. \qquad (8)$$

В случае свободного движения $\left(\mathcal{A}^\nu(p, p_5) = 0, |p_5| = \sqrt{M^2 - m^2}\right)$ уравнение (7) можно записать в четырехмерном пространстве Минковского $(x) = (x_0, \mathbf{x})$ [10]

$$i\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_0} = H_0\phi(x) = \left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_3\beta\gamma_5 m_1 + \beta m_2\right)\phi(x). \qquad (9)$$

Базисные функции свободного движения для уравнения (9) соответствуют двум решениям с положительной энергией и двум решениям с отрицательной энергией:

$$\phi_1^{(+)}(x, s) = U_s\left(T_3 = +1/2\right)e^{-ip_\nu x^\nu} = \begin{pmatrix} U_s(m_1) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_\nu x^\nu};$$

$$\phi_2^{(+)}(x, s) = U_s\left(T_3 = -1/2\right)e^{-ip_\nu x^\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_s(-m_1) \end{pmatrix} e^{-ip_\nu x^\nu};$$

$$\phi_1^{(-)}(x, s) = V_s\left(T_3 = +1/2\right)e^{ip_\nu x^\nu} = \begin{pmatrix} V_s(m_1) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_\nu x^\nu}; \qquad (10)$$

$$\phi_2^{(-)}(x, s) = V_s\left(T_3 = -1/2\right)e^{ip_\nu x^\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_s(-m_1) \end{pmatrix} e^{ip_\nu x^\nu};$$

$$U_s(\pm m_1) = \sqrt{\frac{E + m_2}{2E}} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \mp m_1}{E + m_2}\varphi_s \end{pmatrix};$$

$$V_s(\pm m_1) = \sqrt{\frac{E + m_2}{2E}} \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \mp m_1}{E + m_2}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

В выражениях (10) и (11) $\mathbf{p}$ и $E$ – операторы импульса и энергии частицы с массой $m$; $T_3 = \pm 1/2$ – значения изотопического спина; $U_s\left(T_3 = \pm 1/2\right)$, $V_s\left(T_3 = \pm 1/2\right)$ – восьмикомпонентные спиноры; $U_s(\pm m_1)$, $V_s(\pm m_1)$ – четырехкомпонентные спиноры; $\varphi_s$ и $\chi_s$ – двухкомпонентные нормированные спиновые функции Паули.

Для $U_s\left(T_3 = \pm 1/2\right)$ и $V_s\left(T_3 = \pm 1/2\right)$ с учетом псевдоэрмитовости гамильтониана уравнения (9) справедливы следующие соотношения ортонормированности и полноты:

$$U_s^\dagger\left(T_3 = \mp 1/2\right)\tau_1 U_{s'}\left(T_3 = \pm 1/2\right) = V_s^\dagger\left(T_3 = \mp 1/2\right)\tau_1 V_{s'}\left(T_3 = \pm 1/2\right) = \delta_{ss'};$$

$$U_s^\dagger\left(T_3 = \mp 1/2\right)\tau_1 V_{s'}\left(T_3 = \pm 1/2\right) = V_s^\dagger\left(T_3 = \mp 1/2\right)\tau_1 U_{s'}\left(T_3 = \pm 1/2\right) = 0;$$

$$\sum_s \left(U_s\left(T_3 = \pm 1/2\right)\right)_\alpha \left(U_s^\dagger\left(T_3 = \mp 1/2\right)\right)_\beta (\tau_1)_{\beta\gamma} = \left[1/2\left(1 + \frac{H_0}{E}\right)1/2\left(1 \pm \tau_3\right)\right]_{\alpha\gamma}; \qquad (12)$$

$$\sum_s \left(V_s\left(T_3 = \pm 1/2\right)\right)_\alpha \left(V_s^\dagger\left(T_3 = \mp 1/2\right)\right)_\beta (\tau_1)_{\beta\gamma} = \left[1/2\left(1 - \frac{H_0}{E}\right)1/2\left(1 \pm \tau_3\right)\right]_{\alpha\gamma}.$$

В выражениях (10)–(12) значки $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ относятся к спинорным индексам, значки $s$, $s'$ – к спиновым индексам. Далее при суммировании по спинорным индексам знак суммы и сами индексы могут не указываться.

## 2. Фотонный пропагатор

Уравнения Максвелла в импульсном пространстве для свободного электромагнитного поля можно представить в виде [14]

$$-g^{\nu\lambda}k^2 A_\lambda(k) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\nu k^\lambda A_\lambda(k) = 0. \qquad (13)$$

В уравнении (13) $g^{\nu\lambda}$ – метрический тензор $\left(g^{\nu\lambda} = diag[1, -1, -1, -1]\right)$, $\xi$ – произвольная постоянная ($\xi = 1$ соответствует калибровке Феймана, случай $\xi = 0$ называется калибровкой Ландау).

Согласно [5], [8], при переходе к пространству анти Де Ситтера и появлению массы $M$, переменной $k_5$, потенциала $A_5(k, k_5)$ уравнение (13) преобразуется в следующую систему уравнений:

$$\left(k_5 - M\right)A_\lambda(k, k_5) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k_\lambda A_5(k, k_5) = 0;$$
$$\left(k_5 + M\right)A_5(k, k_5) - k^\lambda A_\lambda(k, k_5) = 0. \qquad (14)$$

Уравнения (14) можно записать также в виде

$$\left(g^{\nu\lambda}\left(k_5 - M\right) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\frac{k^\nu k^\lambda}{k^5 + M}\right) A_\lambda\left(k, k_5\right) = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что обратный оператор или пропагатор в импульсном пространстве можно записать в следующем виде:

$$D_{\mu\nu}\left(k, k_5\right) = -\frac{g_{\mu\nu}\left(k_5 + M\right)}{k^2} - \left(\xi - 1\right)\frac{\left(k_5 + M\right)k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (16)$$

Ниже будем использовать калибровку Фейнмана $\xi = 1$.

В работе [8], главным образом по техническим причинам, при построении теории производится переход к ее эвклидовой формулировке, возникающей при замене $k_0 \to ik_4$. В этом случае пространство анти Де Ситтера (2) переходит в пространство Де Ситтера

$$-k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 + k_5^2 = -\mathrm{k}^2 + k_5^2 = M^2. \quad (17)$$

Очевидно:

$$k_5 = \pm\sqrt{M^2 + \mathrm{k}^2}. \quad (18)$$

Ниже для однозначной записи пропагатора (16) в конфигурационном пространстве $\left(\chi,\ x_5\right)$ будет использоваться эвклидова формулировка теории (17), (18). В этой формулировке

$$D_{\mu\nu}^{Eucl}\left(\mathrm{k}, k_5\right) = \frac{\delta_{\mu\nu}\left(k_5 + M\right)}{\mathrm{k}^2} + \left(\xi - 1\right)\frac{\left(k_5 + M\right)\mathrm{k}_\mu \mathrm{k}_\nu}{\mathrm{k}^4}. \quad (19)$$

Функция распространения в конфигурационном пространстве $\left(\chi, x_5\right)$ записывается в виде

$$D_{\mu\nu}\left(\chi,\ x_5\right) = \frac{i\delta_{\mu\nu}}{2(2\pi)^4}\int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2} e^{i\mathrm{k}\chi}\frac{1}{\left|k_5\right|} \times \left[\left(\left|k\right|_5 + M\right)e^{-i\left|k_5\right|x_5} - \left(\left|k\right|_5 - M\right)e^{i\left|k_5\right|x_5}\right]. \quad (20)$$

Поскольку действие для электромагнитного поля не зависит от координаты $x_5$ [5], [8], далее ее можно положить равной нулю $\left(x_5 = 0\right)$. Учтем также, что $\left|k_5\right| = \sqrt{M^2 + \mathrm{k}^2}$.

Тогда

$$D_{\mu\nu}(\chi) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4\mathrm{k} D_{\mu\nu}^{Eucl}(\mathrm{k}) e^{i\mathrm{k}\chi} = \frac{i\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2}\frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathrm{k}^2}} e^{i\mathrm{k}\chi}. \quad (21)$$

Выражение (21) отличается от стандартного фотонного пропагатора дополнительным наличием в подынтегральном выражении множителя $\frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathrm{k}^2}}$. Этот множитель является новым фактором, влияющим на величину собственной энергии электрона, которая будет вычисляться в разделе 4.

## 3. Электрон-позитронный пропагатор

Уравнение Дирака для свободного движения определено в разделе 1 (см. (7)) и в импульсном пространстве анти Де Ситтера записывается в виде

$$\left(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \tau_3\beta\gamma^5\left(M - \left|p_5\right|\right) - \beta m_2\right)\phi\left(p, p_5\right) = 0. \quad (22)$$

По аналогии с предыдущим разделом из уравнения (22) определяется вид пропагатора в эвклидовой формулировке

$$S^{Eucl}\left(\mathrm{p}, p_5\right) = \frac{1}{ip_4 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \tau_3\beta\gamma^5\left(M - \left|p_5\right|\right) - \beta m_2}. \quad (23)$$

В конфигурационном пространстве $\left(\chi, x_5\right)$ функция распространения имеет вид

$$S\left(\chi, x_5\right) = \frac{iM}{2(2\pi)^4}\int \frac{d^4\mathrm{p}}{\left|p_5\right|} S^{Eucl}\left(\mathrm{p}, p_5\right) e^{i\mathrm{p}\chi} \times \left[e^{-i\left|p_5\right|x_5} + e^{i\left|p_5\right|x_5}\right]. \quad (24)$$

При $x_5 = 0$

$$S\left(\chi\right) = \frac{iM}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4\mathrm{p}}{\left|p_5\right|} S^{Eucl}\left(\mathrm{p}, p_5\right) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4\mathrm{p}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{\sqrt{M^2 + \mathrm{p}^2}}\right) \times \frac{ip_4 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_3\beta\gamma_5\left(M - \sqrt{M^2 + \mathrm{p}^2}\right) + \beta m_2}{\mathrm{p}^2 + m^2} e^{i\mathrm{p}\chi}. \quad (25)$$

Выражения (23), (25) определяют вид электрон-позитронного пропагатора в импульсном и конфигурационном пространствах.

В формулах (17)–(25) и ниже через $\chi$, $\mathrm{k}$, $\mathrm{p}$ обозначены четырехмерные векторы с компонентами $n = 1, 2, 3, 4$ и метрикой $diag[-1, -1, -1, -1]$.

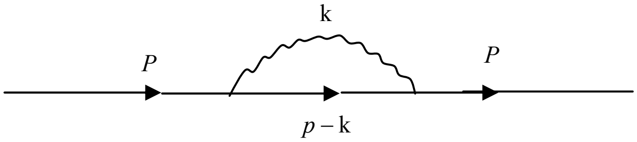
## 4. Собственная энергия электрона

В рассматриваемой теории действие не зависит от координаты $x_5$ [5], [8]. Кроме того, вид лагранжиана взаимодействия в псевдоэрмитовой квантовой электродинамике с массовым параметром $M$ совпадает со стандартным [15]

$$L_{\text{int}} = -ei\int d^4\chi\psi^\dagger\left(\chi\right)\alpha_\mu A^\mu\left(\chi\right)\psi\left(\chi\right). \quad (26)$$

Отсюда следует, что при расчете конкретных процессов псевдоэрмитовой квантовой электродинамики можно использовать теорию возмущений со стандартными правилами Фейнмана, но с фотонными и электрон-позитронными пропагаторами, приведенными в выражениях (19), (21), (23), (25).

Оценку собственной энергии электрона производим во втором порядке теории возмущений. Соответствующая диаграмма процесса приведена на рисунке.




Собственная энергия электрона

В импульсном представлении соответствующий элемент матрицы рассеяния с оператором собственной энергии $\Sigma(\mathrm{p})$ можно записать в виде

$$S_{fi} = -U_{s_f}^{\dagger}\left(T_3 = \mp 1/2\right)\tau_1 \Sigma(\mathrm{p}) U_{s_i}\left(T_3 = \pm 1/2\right). \qquad (27)$$

Как элемент матрицы рассеяния, массовый оператор входит в обкладках соответствующих восьмикомпонентных спиноров с матрицей $\tau_1$ и с противоположными знаками третьей компоненты изотопического спина $T_3$ во входящих и выходящих фейнмановских линиях (см. обсуждение в разделе 2).

В формуле (27) подразумевается, что электрон находится на массовой поверхности $\left(p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2\right)$. В этом случае в выражениях (24), (25) $|p_5| = \sqrt{M^2 - m^2}$ и $\left(M - |p_5|\right) = 2M \sin^2 \frac{\mu}{2} = m_1$.

Выражение для оператора собственной энергии (массового оператора) $\Sigma(\mathrm{p})$, соответствующего диаграмме рисунка, равно

$$\Sigma(\mathrm{p}) = (-ie)^2 \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} i D_{\mu\nu}^{Eucl}(\mathrm{k}) \alpha_\mu i S^{Eucl}(\mathrm{p} - \mathrm{k}) \alpha^{\nu} =$$

$$= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2} \frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathrm{k}^2}} \times \qquad (28)$$

$$\times \alpha_\nu \frac{1}{i(p_4 - k_4) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \tau_3 \beta \gamma m_1 - \beta m_2} \alpha^{\nu}.$$

Для удобства дальнейших вычислений в интеграле (28) произведем обратный поворот Вика и перейдем от эвклидова к пространству Минковского с метрическим тензором $g^{\nu\lambda} = diag[1, -1, -1, -1]\Big(d^4 k = dk_0 d\mathbf{k}$, $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2,\ p_0 = ip_4\Big)$.

Выражение (28) становится равным

$$\Sigma(p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \frac{M}{\sqrt{M^2 - k^2}} \times$$

$$\times \alpha_\nu \frac{p_0 - k_0 + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \tau_3 \beta \gamma^5 m_1 + \beta m_2}{\left(p_0 - k_0\right)^2 - \left(\mathbf{p} - \mathbf{k}\right)^2 - m^2} \alpha^{\nu}. \qquad (29)$$

Выражение (29) для массового оператора отличается от стандартного выражения в квантовой электродинамике (см., например, [16]) двумя особенностями. Первая из них – наличие в числителе вместо выражения $\beta m$ двух слагаемых с массами $m_1$, $m_2$, одно из которых неэрмитово.

Результаты работы [10] показывают, что при надлежащем обращении с псевдоэрмитовыми гамильтонианами конечные результаты квантовой теории для частиц, находящихся на массовой поверхности, совпадают со стандартными.

Вторая особенность выражения (28) – наличие множителя $\frac{M}{\sqrt{M^2 - k^2}}$, которое вводит ограничение на область интегрирования по четырехмерному импульсу $k\left(k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \le M^2\right)$. В нашем случае это ограничение приводит к конечному выражению для собственной энергии электрона.

Обозначая в выражении (28) $\tilde{p}_0 = \left(m^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2\right)^{1/2}$ и производя суммирование по $\nu$, получаем

$$-i\Sigma(p) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^4} \int\limits_{k_0^2 \le M^2 + \mathbf{k}^2} \frac{dk_0 d\mathbf{k}}{\left(k_0 - |\mathbf{k}|\right)\left(k_0 + |\mathbf{k}|\right)} \times$$

$$\times \frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - k_0^2}} \times \qquad (30)$$

$$\times \frac{k_0 - p_0 + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + 2\tau_3 \beta \gamma^5 m_1 + 2\beta m_2}{\left(k_0 - \tilde{p}_0 - p_0\right)\left(k_0 + \tilde{p}_0 - p_0\right)}.$$

Если считать $M \cong m_{planck} = 10^{19}$ ГэВ, то условие $k_0^2 \le \mathbf{k}^2 + M^2$ позволяет произвести контурное интегрирование по $k_0$ в выражении (30), используя теорему о вычетах

$$-i\Sigma(p) = \frac{ie^2}{2(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \times$$

$$\times \left[ \frac{-p_0 + \kappa + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + 2\tau_3 \beta \gamma^5 m_1 + 2\beta m_2}{\kappa(p_0 - \kappa - \tilde{p}_0)(p_0 - \kappa + \tilde{p}_0)} + \right.$$

$$+ \frac{-p_0 - \kappa + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + 2\tau_3 \beta \gamma^5 m_1 + 2\beta m_2}{\kappa(p_0 + \kappa - \tilde{p}_0)(p_0 + \kappa + \tilde{p}_0)} +$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - (\tilde{p}_0 + p_0)^2}} \times \qquad (31)$$

$$\times \frac{\tilde{p}_0 + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + 2\tau_3 \beta \gamma^5 m_1 + 2\beta m_2}{\tilde{p}_0(\tilde{p}_0 - \kappa + p_0)(\tilde{p}_0 + \kappa + p_0)} +$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - (\tilde{p}_0 - p_0)^2}} \times$$

$$\left. \times \frac{-\tilde{p}_0 + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + 2\tau_3 \beta \gamma^5 m_1 + 2\beta m_2}{\tilde{p}_0(\tilde{p}_0 - \kappa - p_0)(\tilde{p}_0 + \kappa - p_0)} \right].$$

В выражении (31) принято обозначение $\kappa = |\mathbf{k}|$.

Подкоренные выражения в двух последних слагаемых (31) равны

$$M^2 + \mathbf{k}^2 - \left(\tilde{p}_0 \pm p_0\right)^2 =$$

$$= M^2 - 2\left(p_0^2 \pm \tilde{p}_0 p_0 - \mathbf{pk}\right) \ge 0. \qquad (32)$$

В выражении (32) $\tilde{p}_0 = \left(p_0^2 + \mathbf{k}^2 - 2\mathbf{pk}\right)^{1/2}$.

Условие положительности (32) приводит к естественному ограничению предела интегрирования по импульсу $\mathbf{k}$. Для покоящегося электрона это условие для верхних знаков в выражении (32) приводит к значению верхнего предела интегрирования по $|\mathbf{k}|$

$$\kappa_{\max} = \frac{M\sqrt{M^2 - 4m^2}}{2m} \approx \frac{M^2}{2m}. \tag{33}$$

Последнее равенство написано с учетом условия $m << M$.

Если $M \approx 10^{19}$ ГэВ, то значение $\kappa_{\max}$ в (33) представляет собой огромную, но конечную величину, равную $\kappa_{\max} = 10^{41}$ ГэВ.

Для того чтобы оценить выражение (31) для массового оператора $\sum(p)$ при энергиях электрона $p_0 << M$, примем значение $\kappa_{\max} = AM$, $A << \dfrac{M}{m}$.

В этом случае заведомо обеспечивается положительность подкоренного выражения (32) и, кроме того, из-за малости второго слагаемого в (32) можно разложить квадратные корни в (31), ограничиваясь тремя членами разложения:

$$\frac{M}{\sqrt{M^2 + \mathbf{k}^2 - (\tilde{p}_0 \pm p_0)^2}} \approx$$
$$\approx \left(1 + \frac{p_0^2 \pm \tilde{p}_0 p_0 - \mathbf{pk}}{M^2} + \frac{3\left(p_0^2 \pm \tilde{p}_0 p_0 - \mathbf{pk}\right)^2}{2M^4}\right). \tag{34}$$

Учет последующих членов разложения в выражении (34) приводит к крайне малому вкладу в $\sum(p)$, пропорциональному степеням отношения $\dfrac{m}{M}$.

Обозначая постоянную тонкой структуры через $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi}$, выражение (31) с учетом (34) можно записать в виде

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{4\pi^2}\int d\mathbf{k} \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\kappa\left(\tilde{p}_0 + \kappa + p_0\right)} - \frac{1}{\kappa\left(\tilde{p}_0 + \kappa - p_0\right)} + \right.$$
$$+ \left(\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{p} - \mathbf{k}\right) + 2\tau_3\beta\gamma^5 m_1 + 2\beta m_2\right) \times$$
$$\times \left[ \frac{1}{\tilde{p}_0 \kappa}\left(\frac{1}{\tilde{p}_0 + \kappa + p_0} + \frac{1}{\tilde{p}_0 + \kappa - p_0}\right) - \right. \tag{35}$$
$$\left. - \frac{1}{M^2 \tilde{p}_0} - \frac{3}{2M^4}\frac{\left(p_0^2 - \mathbf{pk}\right)}{\tilde{p}_0} \right] -$$
$$\left. - \left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_3\beta\gamma^5 m_1 + \beta m_2\right)\frac{3\tilde{p}_0}{2M^4} \right\}.$$

При интегрировании (35) можно воспользоваться подходом Дирака [17]. В качестве системы координат выбирается система, в которой $p_1$ и $p_2$ равны нулю, т. е. направление $k_3$ совпадает с направлением $\mathbf{p}$.

Далее вводится новая переменная $\omega = \tilde{p}_0 + |\mathbf{k}|$. Тогда $d\mathbf{k} = \dfrac{|\mathbf{k}|\,\tilde{p}_0}{\omega} d\omega dk_3 d\varphi$, где $\varphi$ – азимутальный угол.

Слагаемые подынтегрального выражения в формуле (35), не зависящие от параметра $M$, дают стандартный вклад в собственную энергию электрона с учетом введенного нами предела интегрирования $\kappa_{\max} = AM >> m$ (см., например, [17])

$$\sum\nolimits_1(p) = \left(\tau_3\beta\gamma^5 m_1 + \beta m_2\right)\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2AM}{m}\right) - \frac{1}{4}\right). \tag{36}$$

Остальные слагаемые в формуле (35) дают следующий вклад в $\Sigma(p)$:

$$\sum\nolimits_2(p) = -\left(\tau_3\beta\gamma^5 m_1 + \beta m_2\right)\times$$
$$\times \frac{\alpha}{\pi}\left(A^2 + \frac{3}{8}A^4 + o\left(\frac{m}{M}\right)\right) - \tag{37}$$
$$- \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{A^2}{6} + \frac{A^4}{2} + o\left(\frac{m}{M}\right)\right).$$

В выражении (37) $o\left(\dfrac{m}{M}\right)$ – малые величины, пропорциональные степеням отношения $\dfrac{m}{M}$.

Среднее значение операторов $\tau_3\beta\gamma^5 m_1 + \beta m_2$ и $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}$ в обкладках восьмикомпонентных спиноров (см. (27)) равно

$$\left\langle i; T_3 = \mp 1/2 \,|\, \tau_1\left(\tau_3\beta\gamma_5 m_1 + \beta m_2\right) | \, i; T_3 = \pm 1/2 \right\rangle = \frac{m^2}{p_0}; \tag{38}$$

$$\left\langle i; T_3 = \mp 1/2 \,|\, \tau_1 \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} \,|\, i; T_3 = \pm 1/2 \right\rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{p_0}. \tag{39}$$

Из выражений (37)–(39) следует, что второе слагаемое в (37), пропорциональное $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}$, является релятивистски неинвариантным. Анализ выражений (38), (39) показывает, что это слагаемое можно устранить, определяя специальным образом подобранную функцию $f(\mathbf{p}) << \dfrac{M}{m}$ и заменяя верхний предел интегрирования $AM$ на $AMf(\mathbf{p})$. Например, функцию $f(\mathbf{p})$ можно подобрать, приравнивая к нулю сумму слагаемых при соответствующих членах разложения по степеням $\dfrac{\mathbf{p}^2}{m^2}$ при вычислении $\sum(p)$ с учетом (38) и (39).

Тогда с учетом членов разложения до $\dfrac{\mathbf{p}^4}{m^4}$ при $A = 1$ функцию $f(\mathbf{p})$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{p}) = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{3m^2} + \frac{\mathbf{p}^4}{6m^4} + \ldots\right). \tag{40}$$

При произвольном $A$ коэффициенты $a$ и $b$ в разложении $f(\mathbf{p}) = \left(1 + a\frac{p^2}{m^2} + b\frac{p^4}{m^4} + ...\right)$ равны

$$a = \frac{\frac{A^2}{6} + \frac{A^4}{2}}{\frac{3}{2} - 2A^2 - \frac{3}{2}A^4};$$
$$b = \frac{\frac{3}{4}a^2 + a^2A^2 + \frac{9}{4}a^2A^4 + \frac{1}{3}aA^2 + 2aA^4}{\frac{3}{2} - 2A^2 - \frac{3}{2}A^4}. \quad (41)$$

Приведенная процедура является релятивистски инвариантной, поскольку при изменении системы отсчета соответствующим образом меняется функция $f(\mathbf{p})$. Для покоящегося электрона $(\mathbf{p} = 0)$ $f(\mathbf{p}) = 1$.

С учетом вышеизложенного, окончательное выражение для $\sum(p)$ равно

$$\sum(p) = \sum_1(p) + \sum_2(p) = \\ = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{2AM}{m} - \frac{1}{4} - A^2 - \frac{3}{8}A^4 + o\left(\frac{m}{M}\right)\right) \times \\ \times\left(\tau_3\beta\gamma^5 m_1 + \beta m_2\right). \quad (42)$$

Выражение (42) в обкладках спиноров (см. (27)) определяет выражение для конечной собственной энергии электрона при верхнем пределе интегрирования $k_{\max} = AMf(\mathbf{p})$, $\left(\frac{M}{m} >> 1,\ A << \frac{M}{m},\ f(\mathbf{p}) << \frac{M}{m}\right)$.

$$\Delta E^{(2)} = \frac{m}{E}\Delta m^{(2)};$$
$$\Delta m^{(2)} = m\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{2AM}{m} - \frac{1}{4} - A^2 - \frac{3}{8}A^4\right). \quad (43)$$

Значок $^{(2)}$ напоминает, что собственная энергия электрона определяется во втором порядке теории возмущений (см. рисунок).

## Обсуждение результатов

В настоящей работе в рамках псевдоэрмитовой квантовой электродинамики с максимальным массовым параметром $M$ показана конечность выражения для собственной энергии электрона (42), (43) во втором порядке теории возмущений. Универсальная масса $M$ приводит к появлению фундаментальной длины $\frac{\hbar}{Mc}$ и устанавливает предел передаваемых импульсов в промежуточных состояниях.

При $M = 10^{19}$ ГэВ и $A$ = 1 собственная масса $\Delta m^{(2)} \approx 0{,}17\,m$ (см. (42), (43)), что составляет заметную часть массы электрона. Собственная масса оказывается сравнимой с массой электрона при огромном, но конечном значении массы $M = 2 \cdot 10^{121}$ ГэВ. Учитывая, что гравитационное взаимодействие сравнивается по своей силе с остальными взаимодействиями при энергиях $\sim 10^{18}$ ГэВ [18], не исключен заметный вклад сил гравитации в собственную массу электрона, что уменьшает величину $M$. Например, при 50 %-ном вкладе гравитационного взаимодействия в собственную массу, сравнимую с массой электрона, необходимая величина $M \approx 10^{59}$ ГэВ.

Проведенные оценки предполагают пренебрежимо малый вклад в собственную массу электрона слабых взаимодействий и эффектов высших порядков теории возмущений.

При таком подходе масса электрона и массы других элементарных частиц будут полностью определяться эффектами взаимодействия с собственными полями. Этот подход не является новым, он периодически обсуждается разными исследователями (см, например, [19] вместе со ссылками). Кстати, как справедливо указывается в работах [19], данный подход автоматически обуславливает наличие массы у нейтрино разных генераций из-за слабых взаимодействий с собственными калибровочными полями. С другой стороны, малая ожидаемая масса нейтрино $(1 - 10$ эВ$)$ свидетельствует о малом вкладе слабых взаимодействий в собственные массы лептонов.

Выражение (42) содержит и другую возможность для собственной энергии электрона. При $M = 10^{19}$ ГэВ и $A \approx 3{,}62$ оператор $\sum(p)$ становится равным нулю. В этом случае нет необходимости в перенормировке массы электрона. Масса электрона в теории вводится с самого начала извне и сохраняет свое значение до конца тех или иных вычислений. Для лептонов других поколений Стандартной модели при $M = 10^{19}$ ГэВ аналогичные значения коэффициента $A$, при которых $\sum(p) = 0$, составляют: $A$ = 3,54 (мюоны – $m_\mu = 106$ МэВ) и $A$ = 3,48 ($\tau$ – лептоны – $m_\tau = 1800$ МэВ). Для ответа на вопрос о возможности существования одинаковых величин $M$ и $A$, обеспечивающих нулевое значение $\sum(p)$ для лептонов трех поколений Стандартной модели, необходимо провести соответствующие вычисления собственной энергии в следующем (четвертом) порядке теории возмущений.

В заключение следует отметить, что из-за большой рассматриваемой величины массы $M = 10^{19}$ ГэВ радиационные поправки, вычисленные ранее в Стандартной модели и, в частности, в квантовой электродинамике, будут совпадать с аналогичными расчетными данными в теории с максимальной массой $M$ с точностью, заметно превышающей точность современных экспериментальных данных.

Автор благодарен В. Г. Кадышевскому за полезные дискуссии, советы и критические замечания.

## Список литературы


1. Kadyshevsky V. G. // Nucl. Phys. 1978. Vol. **B141**. P. 477; in Proceedings of International Integrative Conference on Group Theory and Mathematical Physics, Austin, Texas, 1978; Fermilab-Pub. 78/70-THY, Sept. 1978; Phys. Elem. Chast. Atom. Yadra. 1980. Vol. **11**. P. 5.

2. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Phys. Lett. 1981. Vol. B**106**. P. 139.

3. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Nuovo Cimento. 1985. Vol. **A87**. P. 324.

4. Chizhov M. V., Donkov A. D., Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Nuovo Cimento. 1985. Vol. **A87**. P. 350.

5. Chizhov M. V., Donkov A. D., Kadyshevsky V. G., Mateev M. D. // Nuovo Cimento. 1985. Vol. **A87**. P. 373.

6. Kadyshevsky V. G. // Phys. Part. Nucl. 1998. Vol. **29**. P. 227.

7. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Rodionov V. N., Sorin A. S. // Doklady Physics 51. 2006. P. 287. e-Print: hep-ph/0512332.

8. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Rodionov V. N., Sorin A. S. // GERN-TH/2007-150, arxiv: 0708.4205v1, [hep-ph].

9. Markov M. A., Prog. Theor Phys. Suppl., Commemoration Issue for the Thirtieth Anniversary of Meson Theory and Dr. H. Yukawa, 1965. P. 85; Sov. Phys. JETP, 1967. Vol. **24.** P. 584.

10. Незнамов В. П. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 70–75. arxiv: 1002.1403 (physics.gen-ph). (2010)

11. Froissart M. // Nuovo Cimento. 1959. Vol. 14. P. 197; Sudarshan E. C. G. // Phys. Rev. 1961. Vol. 123. P. 2183; Mostafazadeh A. // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43. P. 2814.

12. Bender C. M., Brody D. and Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001; Wigner E. // J. Math Phys. 1960. Vol. 1. P. 409.

13. Mostafazadeh A. // J. Math Phys. 2002. Vol. 43. P. 205–214. P. 3944–3951.

14. Itzykson C, Zuber J. B. // Quantum Filed Theory. 1980. McGraw-Hill Book Company. (русский перевод: Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.)

15. Kadyshevsky V. G. Report on the International Conference “Gauge Field. Yesterday, Today, Tomorrow” dedicated to Academician Andrey A. Slavnov’s 70$^{th}$ Anniversary. Moscow, 20–23 January 2010.

16. Bjorken J. D., Drell S. D. // Relativistic Quantum Mechanics. 1964. McGraw-Hill Book Company. (русский перевод: Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978.)

17. Dirac P. A. M. // Lecture on Quantum Field Theory. 1967. New York, Published by Belfer Graduate school of Science Yeshiva University. (русский перевод: Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир, 1971.)

18. Peskin M. E. and Schroeder D. V. Introduction to Quantum Field Theory, (Addison-Wesley Publishing Company, 1995). (русский перевод: Введение в квантовую теорию поля, РХД, Москва, Ижевск, 2001.)

19. Nesbet R. K. arxiv: hep-ph/0606176v2 (2006); arxiv:0711.1382v2 [hep-th](2008).


Статья поступила в редакцию 19.03.2010