УДК 530.145; 514.764.2; 530.145.7

О ПРОБЛЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ЭРМИТОВОСТИ ГАМИЛЬТОНИАНОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ ½ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Доказывается возможность использования подхода, основанного на формализме псевдоэрмитовых гамильтонианов, для описания динамики частиц со спином ½ в стационарных гравитационных полях. Доказательство включает анализ трех выражений для гамильтонианов, получаемых из уравнения Дирака и описывающих динамику частиц со спином ½ в гравитационном поле решения Керра. Гамильтонианы соответствуют различным выборам систем реперов и различаются между собой. К каждому из этих гамильтонианов применяются стандартные правила псевдоэрмитовой квантовой механики, в результате чего получается один и тот же эрмитов гамильтониан. Спектр собственных значений полученного таким образом гамильтониана совпадает со спектром тех гамильтонианов, которые следуют из уравнения Дирака при любом выборе системы реперов. Показано, что для описания динамики частиц со спином ½ в стационарных гравитационных полях может быть использован не только формализм псевдоэрмитовых гамильтонианов, но и альтернативный подход, основанный на использовании скалярного произведения Паркера.

Введение

В ряде работ (например, [1]) установлено, что попытки описания динамики частиц с полуцелым спином в гравитационном поле в рамках гамильтонова формализма наталкиваются на две проблемы, которые до настоящего времени не решены. Одна из проблем состоит в зависимости вида возникающих гамильтонианов от выбора системы реперов. Без решения этой проблемы по существу обесценивается весь гамильтонов формализм, поскольку на его основе нельзя делать физически проверяемые предсказания. Другая проблема – отсутствие у гамильтонианов свойства эрмитовости, т. е. того основного свойства, на котором основан аппарат квантовой механики и квантовой теории поля.

Авторы некоторых работ (например, [2], [3]) видят решение проблемы на пути использования релятивистски инвариантного скалярного произведения для векторов пространства состояния (скалярного произведения Паркера). Этот подход автоматически приводит к эрмитовости гамильтониана относительно введенного скалярного произведения. Однако уравнение Шредингера в этом формализме записывается не с оператором $i\hbar\left(\partial/\partial t\right)$ в левой части (где под временной координатой t понимается время бесконечно удаленного наблюдателя), а с оператором $i\hbar c\nabla_0$ (где под ∇_0 понимается ковариантная производная по времени).

Таким образом, подход, основанный на работах [2, 3], не приводит к восстановлению всей совокупности стандартных процедур квантовой механики, включающих:

- запись уравнения Шредингера с оператором $i\hbar\left(\partial/\partial t\right)$ в левой части, в котором под временной координатой t понимается время бесконечно удаленного наблюдателя;
- построение скалярного произведения (φ, ψ) двух векторов гильбертова пространства состояний по правилу $\left(\varphi, \psi\right) = \int\limits_V \left(\varphi^+\psi\right) d^3x$ и выполнение условия эрмитовости гамильтониана относительно такого произведения.

В некоторых работах (например, [4, 8]) для эрмитовости возникающие гамильтонианы были модифицированы. Однако способ модификации не выглядел в достаточной мере обоснованным.

*E-mail: neznamov @ vniief.ru

В данной работе проблему неоднозначности и эрмитовости гамильтонианов предлагается решать, используя формализм псевдоэрмитовых гамильтонианов (см. [5–7] и указанные там ссылки). Жизнеспособность такого подхода обосновывается следующим образом. Рассматриваются три типа гамильтонианов, соответствующих частице со спином ½ в аксиально-симметричном стационарном гравитационном поле, создаваемом вращающимся точечным телом с массой M и моментом $\vec{J}$. Напомним, что метрика такого гравитационного поля описывается решением Керра, которое в случае $\vec{J}=0$ переходит в метрику Шварцшильда. Гамильтонианы записываются при различных выборах системы реперов:

1) в системе реперов в калибровке [8];
2) в системе реперов в так называемой симметричной калибровке;
3) в «киллинговой» системе реперов [9], т. е. в системе, в которой реперный вектор $H^{\alpha}_{\underline{0}}$ совпадает с направлением хода времени удаленного наблюдателя.

Все три гамильтониана, во-первых, по виду различаются между собой, во-вторых, не являются эрмитовыми. Однако как показано в данной работе, все три гамильтониана являются псевдоэрмитовыми.

Напомним, что, согласно работам [5–7], условие псевдоэрмитовости гамильтонианов предполагает существование матрицы ρ, удовлетворяющей соотношению

$$\rho\hat{H}\rho^{-1}=\hat{H}^{+}. \tag{1}$$

Если существует матрица η, удовлетворяющая соотношению

$$\rho=\eta\eta^{+}, \tag{2}$$

то гамильтониан $\hat{\mathrm{H}}$, построенный по правилу

$$\hat{\mathrm{H}}=\eta\hat{H}\eta^{-1}=\hat{\mathrm{H}}^{+}, \tag{3}$$

будет эрмитовым со спектром собственных значений, совпадающим со спектром исходного гамильтониана $\hat{H}$.

Следует иметь в виду, что не всякие изначально неэрмитовы гамильтонианы $\hat{H}$ являются псевдоэрмитовыми, и не все из них могут быть приведены к эрмитовым выражениям $\hat{\mathrm{H}}$. Однако в случае трех указанных выше типов гамильтонианов после выполнения процедур формализма псевдоэрмитовых гамильтонианов мы приходим к выводам, которые априори далеко не очевидны. Так оказывается, что во всех трех случаях выражения для $\hat{\mathrm{H}}$, во-первых, эрмитовы, во-вторых, совпадают между собой. Такое совпадение означает, что независимо от выбора системы реперов в гравитационном поле всегда существует единый для всех частиц со спином ½ эрмитов гамильтониан $\hat{\mathrm{H}}$, обладающий тем же спектром уровней энергии, что и любой из исходных операторов $\hat{H}$. После перехода к гамильтониану $\hat{\mathrm{H}}$ может быть использован аппарат квантовой механики в стандартной форме. В частности, в левой части уравнения Шредингера будет стоять оператор $i\hbar(\partial/\partial t)$, в котором под временной координатой t понимается время бесконечно удаленного наблюдателя.

Что касается векторов состояния, то в формализме псевдоэрмитовых гамильтонианов при переходе от $\hat{H}$ к $\hat{\mathrm{H}}$ они, конечно, меняются. Но они могут быть восстановлены путем умножения векторов состояния, получаемых с помощью оператора $\hat{\mathrm{H}}$, на матрицу η, зависящую от выбора системы реперов. Таким образом, формализм псевдоэрмитовых гамильтонианов позволяет определить не только спектр собственных значений, но и амплитуды переходов. Последние вычисляются после фиксирования системы реперов, нахождения соответствующей матрицы η и, естественно, зависят от выбора системы реперов.

В результате проведенного исследования мы приходим к выводу, что имеются два принципиально различных способа описания динамики частиц с полуцелым спином в гравитационных полях. Первый способ основан на использовании скалярного произведения Паркера и оператора $i\hbar c\nabla_0$ в левой части уравнения Шредингера. Второй способ – это подход, основанный на формализме псевдоэрмитовых гамильтонианов. Оба подхода позволяют получать ответы на все вопросы, которые возникают в проблеме описания динамики частицы с полуцелым спином в гравитационном поле. Особенность второго способа описания состоит в том, что его аппарат близок к аппарату стандартной квантовой механики.

1. Два способа приведения уравнения Дирака к форме уравнения Шредингера

Рассмотрение проблемы движения частиц со спинами ½, как правило (см., например, [10–13, 4, 8]), проводится при двух предположениях:

1) стационарности гравитационных полей (Шварцшильд, Керр);
2) минимальности взаимодействия биспиноров с гравитационным полем, т. е. взаимодействия через посредство учета зависимости от метрики $g_{\mu\nu}$ реперных векторов $H^{\mu}_{\underline{\alpha}}$.

Напомним ход соответствующих рассуждений и введем обозначения.

Реперные векторы определяются соотношениями

$$H_{\underline{\alpha}}^{\mu} H_{\underline{\beta}}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \tag{4}$$

где

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[-1, 1, 1, 1\right]. \tag{5}$$

Наряду с системой реперов $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ могут быть введены еще три системы реперных векторов $H_{\underline{\alpha}\mu}$, $H^{\underline{\alpha}\mu}$, $H_{\mu}^{\underline{\alpha}}$, отличающиеся от $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ местом мирового и локального (подчеркнутого) индексов. Поднимание и опускание мировых индексов производится с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного к нему тензора $g^{\mu\nu}$, а локальных индексов – с помощью тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

Предполагается, что движение частиц описывается уравнением Дирака, которое в системе единиц $\hbar = c = 1$ записывается как

$$\gamma^{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} + \Phi_{\alpha}\psi\right) - m\psi = 0. \tag{6}$$

Здесь m – масса частицы; ψ – 4-компонентный «столбцовый» биспинор; γ^{α} – матрицы Дирака 4×4, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}E. \tag{7}$$

В круглых скобках в соотношении (6) стоит ковариантная производная от биспинора $\nabla_{\alpha}\psi$:

$$\nabla_{\alpha}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} + \Phi_{\alpha}\psi. \tag{8}$$

В конструкцию $\nabla_{\alpha}\psi$ входит величина Φ_{α}, которая называется биспинорной связностью. Для нахождения явного вида Φ_{α} необходимо фиксировать некоторую систему реперных векторов $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$, определяемых соотношением (4). После этого величина Φ_{α} может быть выражена через «кристоффельные» производные от реперов следующим образом («кристоффельные» производные обозначаются точкой с запятой):

$$\Phi_{\alpha} = -\frac{1}{4} H_{\mu}^{\underline{\varepsilon}} H_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha} S^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Далее наряду с дираковскими матрицами с мировыми индексами γ^{α} будут использоваться дираковские матрицы с локальными индексами $\gamma^{\underline{\alpha}}$. Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется соотношением

$$\gamma^{\alpha} = H_{\underline{\beta}}^{\alpha}\gamma^{\underline{\beta}}. \tag{10}$$

Из (4), (7), (10) следует, что

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}} + \gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}} = 2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E. \tag{11}$$

В терминах матриц $\gamma^{\underline{\alpha}}$ уравнение Дирака (6) может быть записано следующим образом:

$$H_{\underline{\mu}}^{\alpha}\gamma^{\underline{\mu}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} + \Phi_{\alpha}\psi\right) - m\psi = 0. \tag{12}$$

Величины $\gamma^{\underline{\alpha}}$ удобно выбирать так, чтобы они имели одинаковый вид во всех локальных системах отсчета. В качестве системы $\gamma^{\underline{\alpha}}$ может быть использована, например, известная из квантовой электродинамики система

$$\gamma_{\underline{0}} = -i\rho_3; \quad \gamma_{\underline{k}} = \rho_2\sigma_k. \tag{13}$$

В равенствах (13) σ_k – матрицы Паули, ρ_3, ρ_2 – четырехкомпонентные матрицы, равные

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \ \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \ \rho_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Как система $\gamma^{\underline{\alpha}}$, так и система γ^{α} может быть использована для построения полной системы матриц 4 × 4. Полной системой является, например, система

$$E,\ \gamma_{\alpha},\ S_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}\right),\ \gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_5\gamma_{\alpha}. \tag{15}$$

Всякая система дираковских матриц допускает несколько дискретных автоморфизмов. Мы ограничимся автоморфизмом

$$\gamma_{\alpha} \to \gamma_{\alpha}^{+} = -D\gamma_{\alpha}D^{-1}. \tag{16}$$

Матрицу D будем называть антиэрмитизирующей.

Уравнение Дирака может быть записано в форме уравнения Шредингера. Если бы возникающий при этом оператор Гамильтона (или оператор эволюции) оказался эрмитовым и однозначным, это упростило бы анализ физического содержания теории, поскольку позволило бы использовать аппарат квантовой теории для нахождения спектра собственных значений и векторов состояния. Однако в общем случае оператор Гамильтона не обладает указанными свойствами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Существуют, по меньшей мере, два способа приведения уравнения Дирака (6) к форме уравнения Шредингера.

<u>Первый способ</u> приведения уравнения Дирака к форме уравнения Шредингера.

В этом способе конструкция оператора Гамильтона определяется условием, чтобы в левой части уравнения Шредингера стоял оператор $i\left(\partial/\partial t\right)$, причем под t понимается время удаленного наблюдателя.

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \tag{17}$$

Оператор $\hat{H}$ в правой части (17) имеет смысл оператора эволюции в системе отсчета, связанной с удаленным наблюдателем. Из (6), (17) следует, что

$$\hat{H} = \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\nabla_k - i\Phi_0 - \frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0. \tag{18}$$

Подставляем в (18) выражения (8) для ковариантных производных, получаем:

$$\hat{H} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\Phi_k. \tag{19}$$

Для дальнейшей конкретизации выражения для $\hat{H}$ необходимо в (19) подставить выражения (9) для Φ_0 и Φ_k. Поскольку в (9) содержатся реперные векторы и их производные, то после такой подстановки оказывается, что гамильтониан начинает зависеть от выбора реперов. Этот факт мог бы показаться нефизичным, если учесть, что уравнение Дирака в исходной форме обладает инвариантностью относительно перехода от одной системы реперов к другой. Однако запись уравнения Дирака в форме уравнения Шредингера (17) предполагает отход от ковариантности, поскольку в левую часть выносится частная производная по времени и тем самым временная координата становится выделенной. Нарушение равноправия координат и приводит к зависимости гамильтониана от выбора реперов. Еще одним «недостатком» гамильтониана в форме (19) является отсутствие у него эрмитовости в стандартном понимании этого термина (см. Введение).

<u>Второй способ</u> приведения уравнения Дирака к форме уравнения Шредингера.

В этом способе конструкция оператора Гамильтона определяется условием, чтобы в левой части уравнения Шредингера стоял оператор $i\nabla_0$ (где под ∇_0 понимается ковариантная производная по времени). Таким образом, уравнение Шредингера записывается в виде

$$i\left(\nabla_0\Psi\right) = \hat{\mathbf{H}}\Psi, \tag{20}$$

где

$$\hat{\mathbf{H}} \equiv \hat{H} + i\Phi_0. \tag{21}$$

Из уравнения Дирака (6) и уравнения (20) следует, что оператор $\hat{\mathbf{H}}$ (будем называть его оператором ковариантной эволюции) имеет вид

$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\Phi_k. \tag{22}$$

Легко заметить, что выражение в правой части (22) автоматически ковариантно относительно 3-мерных (но не 4-мерных!) преобразований.

В работах, [2, 3] и др. была предложена конструкция скалярного произведения, при использовании которой оператор $\hat{\mathbf{H}}$ оказывается эрмитовым. Таким образом, второй способ приведения уравнения Дирака к форме Шредингера позволяет получать всю необходимую информацию об эволюции векторов состояния. По существу он эквивалентен прямому методу решения уравнения Дирака. Вместе с тем, этот способ не позволяет использовать аппарат квантовой механики в стандартном виде, поскольку в левой части уравнения Шредингера стоит оператор, отличный от оператора $i\left(\partial/\partial t\right)$.

Каждый из описанных двух способов приведения уравнения Дирака к форме уравнения Шредингера имеет свои особенности, однако не содержит запретов, не позволяющих применять их для анализа физического содержания решений уравнения Дирака. Далее именно этому и посвящена настоящая работа.

2. Решение Керра в области слабого гравитационного поля

Метрика решения Керра в первом порядке по «массе» M с размерностью длины (под M понимается половина гравитационного радиуса, т. е. величина GM/c^2) приводится во многих источниках, например, [14, 15]. В указанном приближении метрика Керра имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&g_{00}=-1+2\frac{M}{R};\quad g_{0k}=2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad g_{mn}=\delta_{mn}+2\frac{M}{R}\delta_{mn};\quad \sqrt{-g}=1+2\frac{M}{R};\\
&g^{00}=-1-2\frac{M}{R};\quad g^{0k}=2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad g^{mn}=\delta_{mn}-2\frac{M}{R}\delta_{mn}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Величину J_{mn}, входящую в (23), будем называть приведенным тензором углового момента (под J_{mn} понимается величина, получаемая путем деления «физического» тензора углового момента на Mc). Вместо тензора J_{mn} можно использовать эквивалентный ему аксиальный вектор $J_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{mnk}J_{mn}$, где ε_{mnk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга.

Символы Кристоффеля, соответствующие метрике (23), равны:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix}=0;\quad \begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}=\frac{MR_k}{R^3};\quad \begin{pmatrix}0\\mn\end{pmatrix}=3\frac{M\left[\left(J_{ml}R_l\right)R_n+\left(J_{nl}R_l\right)R_m\right]}{R^5};\\
&\begin{pmatrix}k\\00\end{pmatrix}=\frac{MR_k}{R^3};\quad \begin{pmatrix}m\\0n\end{pmatrix}=2\frac{MJ_{mn}}{R^3}-3\frac{M\left[\left(J_{ml}R_l\right)R_n-\left(J_{nl}R_l\right)R_m\right]}{R^5};\\
&\begin{pmatrix}k\\mn\end{pmatrix}=-\frac{M}{R^3}\left[\delta_{km}R_n+\delta_{kn}R_m-\delta_{mn}R_k\right].
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Во многих публикациях (например, [4]) исследование динамики частицы с полуцелым спином производилось в пространстве, для описания метрики которого использовались две функции от пространственных координат: $V=V(x,y,z)$, $W=W(x,y,z)$.

$$ds^2=-V^2dt^2+W^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right). \tag{25}$$

Сравнивая (25) с (23), видим, что для решения Шварцшильда $\left(J_{kl}=0\right)$

$$V=1-\frac{M}{R};\quad W=1+\frac{M}{R}. \tag{26}$$

Следует иметь в виду, что выражение (25) для квадрата интервала имеет ограниченную область применимости. Например, решение Керра (23) в принципе не может быть сведено к виду (25). В последующем мы придерживаемся обозначений (23).

Введем для поля Керра вектор Киллинга, связанный с направлением хода времени удаленного наблюдателя. В гравитационном поле Шварцшильда имеются три вектора Киллинга, а в поле Керра – два. Векторы Киллинга определяются через посредство производной Ли. Производная Ли от метрики вдоль вектора ξ^α имеет вид:

$$\delta_\xi g_{\alpha\beta}=\xi^\sigma g_{\alpha\beta,\sigma}+\xi^\sigma{}_{,\alpha}g_{\sigma\beta}+\xi^\sigma{}_{,\beta}g_{\alpha\sigma}. \tag{27}$$

Если вектор ξ^α такой, что выполняется равенство

$$\delta_\xi g_{\alpha\beta} = 0, \tag{28}$$

то вектор ξ^α является вектором Киллинга. Легко видеть, что вектор вида

$$\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0) \tag{29}$$

в случае стационарной метрики является вектором Киллинга.

По определению, киллинговой системой реперов будем называть систему, в которой реперный вектор $\tilde{H}^\alpha_{\underline{0}}$ коллинеарен вектору ξ^α, т. е. имеет отличную от нуля только компоненту $\tilde{H}^0_{\underline{0}}$

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} \neq 0, \ \tilde{H}^k_{\underline{0}} = 0. \tag{30}$$

Векторы, удовлетворяющие (30), будем помечать тильдой сверху.

Используя (4) и (30), устанавливаем, что:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \left[1 + \frac{M}{R}\right]; \quad \tilde{H}^k_{\underline{0}} = 0; \quad \tilde{H}^0_{\underline{k}} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}; \quad \tilde{H}^m_{\underline{k}} = \delta_{mk}\left[1 - \frac{M}{R}\right]; \tag{31}$$

$$\tilde{H}^{0\underline{0}} = -\left[1 + \frac{M}{R}\right]; \quad \tilde{H}^{k\underline{0}} = 0; \quad \tilde{H}^{0\underline{k}} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}; \quad \tilde{H}^{m\underline{k}} = \delta_{mk}\left[1 - \frac{M}{R}\right]; \tag{32}$$

$$\tilde{H}_{\underline{0}0} = -\left[1 - \frac{M}{R}\right]; \quad \tilde{H}_{\underline{0}k} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}; \quad \tilde{H}_{\underline{k}0} = 0; \quad \tilde{H}_{\underline{p}k} = \delta_{pk}\left[1 + \frac{M}{R}\right]; \tag{33}$$

$$\tilde{H}^{\underline{0}}_0 = \left[1 - \frac{M}{R}\right]; \quad \tilde{H}^{\underline{0}}_k = -2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}; \quad \tilde{H}^{\underline{k}}_0 = 0; \quad \tilde{H}^{\underline{k}}_m = \delta_{mk}\left[1 + \frac{M}{R}\right]. \tag{34}$$

Заметим, что система (31)–(34) совпадает с системой, полученной для стационарного гравитационного поля в [9]. Однако она не совпадает с системой [16], которая использовалась в некоторых работах (например, [8]).

Величины Φ_α находим по формуле (9). Для системы (31)–(34) получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_0 &= -\frac{1}{2}\frac{MR_k}{R^3}S^{\underline{0}\underline{k}} + \frac{1}{2}\left\{\frac{MJ_{mn}}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{M\left[\left(J_{ml}R_l\right)R_n - \left(J_{nl}R_l\right)R_m\right]}{R^5}\right\}S^{\underline{m}\underline{n}};\\
\tilde{\Phi}_0 &= \frac{1}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}} - \frac{1}{2}\left\{\frac{MJ_k}{R^3} - 3\,\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}};
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_k &= \frac{1}{4}\frac{M}{R^3}\left[R_p\delta_{kq} - R_q\delta_{kp}\right]S^{\underline{p}\underline{q}} - \left\{\frac{MJ_{km}}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{M\left[\left(J_{kl}R_l\right)R_m - \left(J_{ml}R_l\right)R_k\right]}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{m}};\\
\tilde{\Phi}_k &= -\frac{1}{2}\frac{M}{R^3}R_pS_{\underline{k}\underline{p}} - \left\{\frac{MJ_{km}}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{M\left[\left(J_{kl}R_l\right)R_m - \left(J_{ml}R_l\right)R_k\right]}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{m}}.
\end{aligned} \tag{36}$$

В (35), (36) выражения для $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_k$ приведены в двух эквивалентных формах.

3. Гамильтонианы для решения Керра

3.1. Гамильтониан в «киллинговой» системе реперов

Оператор Гамильтона $\hat{\tilde{H}}$ находится по общей формуле (19), но с использованием реперов с тильдами (31)–(34) и компонент биспинорной связности с тильдами (35), (36)

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\tilde{\nabla}_k - i\tilde{\Phi}_0 - \frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0. \tag{37}$$

Или

$$\hat{\tilde{H}} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k} - i\tilde{\Phi}_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\tilde{\Phi}_k. \tag{38}$$

Для удобства вычисления записываем гамильтониан (38) в виде суммы четырех слагаемых:

$$\hat{\tilde{H}} \equiv \hat{\tilde{H}}_1 + \hat{\tilde{H}}_2 + \hat{\tilde{H}}_3 + \hat{\tilde{H}}_4. \tag{39}$$

Здесь

$$\hat{\tilde{H}}_1 \equiv -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0; \tag{40}$$

$$\hat{\tilde{H}}_2 \equiv \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k}; \tag{41}$$

$$\hat{\tilde{H}}_3 \equiv -i\tilde{\Phi}_0; \tag{42}$$

$$\hat{\tilde{H}}_4 \equiv \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\tilde{\Phi}_k. \tag{43}$$

Вычисляем каждое из четырех слагаемых, входящих в (39):

$$\hat{\tilde{H}}_1 = im\left(1-\frac{M}{R}\right)\gamma_{\underline{0}} - 2im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\gamma^{\underline{k}}; \tag{44}$$

$$\hat{\tilde{H}}_2 = -i\left[1-2\frac{M}{R}\right]\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k}; \tag{45}$$

$$\hat{\tilde{H}}_3 = -\frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}} + \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \tag{46}$$

$$\hat{\tilde{H}}_4 = i\frac{M}{R^3}R_k\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} - i\frac{MJ_k}{R^3}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}} + 3i\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_k. \tag{47}$$

Подстановка (44)–(47) в (39) дает:

$$\hat{\tilde{H}} = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} -$$

$$- 2im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}. \tag{48}$$

Члены, не содержащие J_{mn}, соответствуют гамильтониану в задаче Шварцшильда. Они совпадают с соответствующим выражением для гамильтониана в работах [4]. Однако остальная часть гамильтониана (48), т. е. часть, содержащая J_{mn}, не совпадает с аналогичной частью в работе [8]. Расхождения проистекают из-за различия в системах реперов. Этот факт подтверждается и соображениями, приведенными в работе [1], в которой было обращено внимание на «неоднозначность» гамильтонианов из-за зависимости их от выбора реперов.

Тензор J_{mn} в выражении (48) можно заменить на аксиальный тензор J_k. После такой замены получим следующий вид гамильтониана $\hat{\tilde{H}}$ в «киллинговой» системе реперов:

$$\hat{\tilde{H}} = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M}{R^3}\varepsilon_{klq}R_lJ_q\frac{\partial}{\partial x^k} - 2im\frac{M}{R^3}\varepsilon_{klq}R_lJ_q\gamma_{\underline{k}} +$$

$$+ 2i\frac{M}{R^3}\left(J_l\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{l}}\right)R_k\frac{\partial}{\partial x^k} - 2i\frac{M}{R^3}\left(R_l\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{l}}\right)J_k\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}. \tag{49}$$

3.2. Два других гамильтониана

Наряду с гамильтонианом (49) в «киллинговой» системе реперов приведем без вывода еще два выражения для гамильтонианов, придерживаясь принятых выше обозначений.

1) Система реперов, использованная в работе [8]*:

$$H'_{\underline{0}0} = -\left[1-\frac{M}{R}\right];\quad H'_{\underline{0}k} = 0;\quad H'_{\underline{k}0} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H'_{\underline{pk}} = \delta_{pk}\left[1+\frac{M}{R}\right]; \tag{50}$$

$$H'^{\underline{0}}_{0} = \left[1-\frac{M}{R}\right];\quad H'^{\underline{0}}_{k} = 0;\quad H'^{\underline{k}}_{0} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H'^{\underline{k}}_{m} = \delta_{mk}\left[1+\frac{M}{R}\right]; \tag{51}$$

$$H'^{0\underline{0}} = -\left[1+\frac{M}{R}\right];\quad H'^{k\underline{0}} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H'^{0\underline{k}} = 0;\quad H'^{m\underline{k}} = \delta_{mk}\left[1-\frac{M}{R}\right]; \tag{52}$$

$$H'^{0}_{\underline{0}} = \left[1+\frac{M}{R}\right];\quad H'^{k}_{\underline{0}} = -2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H'^{0}_{\underline{k}} = 0;\quad H'^{m}_{\underline{k}} = \delta_{mk}\left[1-\frac{M}{R}\right]. \tag{53}$$

Гамильтониан в системе реперов (50)–(53) (гамильтониан ОСТ):

$$\hat{H}' = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} +$$

$$+ 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}. \tag{54}$$

2) Система реперов в симметричной калибровке:

$$H^{0}_{\underline{0}} = \left[1+\frac{M}{R}\right];\quad H^{k}_{\underline{0}} = -\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H^{0}_{\underline{k}} = \frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H^{m}_{\underline{k}} = \delta_{mk}\left[1-\frac{M}{R}\right]; \tag{55}$$

$$H_{0\underline{0}} = -\left[1-\frac{M}{R}\right]; H_{k\underline{0}} = \frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H_{0\underline{k}} = \frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H_{m\underline{k}} = \delta_{mk}\left[1+\frac{M}{R}\right]; \tag{56}$$

$$H^{\underline{0}0} = -\left[1+\frac{M}{R}\right];\quad H^{\underline{0}k} = \frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H^{\underline{k}0} = \frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H^{\underline{k}m} = \delta_{mk}\left[1-\frac{M}{R}\right]; \tag{57}$$

$$H^{\underline{0}}_{0} = \left[1-\frac{M}{R}\right];\quad H^{\underline{0}}_{k} = -\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H^{\underline{k}}_{0} = \frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3};\quad H^{\underline{k}}_{m} = \delta_{mk}\left[1+\frac{M}{R}\right]. \tag{58}$$

Гамильтониан в системе реперов (55)–(58):

$$\hat{H} = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} +$$

$$+ 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} - im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\gamma_{\underline{k}} + i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{59}$$

У рассматриваемых гамильтонианов (48), (54), (59) совпадают шварцшильдовы члены и один из керровских членов. Остальные члены у всех трех гамильтонианов различаются. Самый большой ассортимент членов имеется у гамильтониана $\hat{\hat{H}}$ («киллинговая» система реперов).

Ни один из гамильтонианов (48), (54), (59) не является эрмитовым.

3.3. Гамильтонианы в обозначениях работ [4, 8]

Для удобства сравнения с результатами работ [4, 8] приводим выражения (49), (54), (59) в случае использования метрики $\eta_{\underline{\alpha\beta}} = \mathrm{diag}\left[1,-1,-1,-1\right]$ и матриц Дирака $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$, $\Sigma^k = \gamma_5\gamma^0\gamma^k$. Выражения (49), (54), (59) принимают вид выражений (60), (61), (62) соответственно.

---

*Систему реперов, использованную в работе Обухова – Силенко – Теряева [8], будем называть системой ОСТ.

$$\hat{\tilde{H}} = \beta m - \frac{M}{R}\beta m + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \frac{2M}{R}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \frac{i}{2}\frac{M}{R^3}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R} + \frac{2M}{R^3}\mathbf{J}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{p}\right) + \frac{2M}{R^3}\left(\mathbf{J}\times\mathbf{R}\right)\beta m\boldsymbol{\alpha} -$$
$$- \frac{2M}{R^3} i\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{J}\right)\left(\mathbf{R}\mathbf{p}\right) + \frac{2M}{R^3} i\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}\right)\left(\mathbf{J}\mathbf{p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{R^3}\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{J}\right) - \frac{3M\left(\mathbf{J}\mathbf{R}\right)\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}\right)}{R^5}\right). \quad (60)$$

$$\hat{H}' = \beta m - \frac{M}{R}\beta m + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \frac{2M}{R}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \frac{i}{2}\frac{M}{R^3}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R} + \frac{2M}{R^3}\mathbf{J}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{p}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M}{R^3}\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{J}\right) - \frac{3M\left(\mathbf{J}\mathbf{R}\right)\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}\right)}{R^5}\right). \quad (61)$$

$$\hat{H} = \beta m - \frac{M}{R}\beta m + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - \frac{2M}{R}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \frac{i}{2}\frac{M}{R^3}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R} + \frac{2M}{R^3}\mathbf{J}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{p}\right) - \frac{M}{R^3}\left(\mathbf{J}\times\mathbf{R}\right)\beta m\boldsymbol{\alpha} - \frac{M}{R^3} i\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{J}\right)\left(\mathbf{R}\mathbf{p}\right) + \frac{M}{R^3} i\left(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}\right)\left(\mathbf{J}\mathbf{p}\right). \quad (62)$$

4. Формализм псевдоэрмитовых гамильтонианов

4.1. Построение оператора Ĥ для гамильтониана ОСТ

Будем руководствоваться правилами обращения с псевдоэрмитовыми гамильтонианами, которые изложены в [5−7] (см. формулы (1)–(3)). Первоначально убедимся в псевдоэрмитовости гамильтониана (54). Условие псевдоэрмитовости (1) предполагает существование матриц ρ, ρ^{-1}, удовлетворяющих соотношению $\rho\hat{H}\rho^{-1} = \hat{H}^{\dagger}$. Если соотношение (1) записать для гамильтониана (54), то с точностью до первого порядка по M получим:

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R}, \quad \rho^{-1} = 1 - 3\frac{M}{R}. \quad (63)$$

Из (2) и (63) находим, что

$$\eta = 1 + \frac{3}{2}\frac{M}{R}. \quad (64)$$

Подстановка (64) в (3) и использование выражения (54) приводит к искомому выражению эрмитова гамильтониана:

$$\hat{\mathrm{H}} = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{M}{R}\right)\hat{H}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{M}{R}\right) = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} +$$
$$+ 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_l R_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}. \quad (65)$$

Сравнивая (65) с (54), видим, что изменилась только шварцшильдова часть. Керровская часть в гамильтониане (54) была эрмитовой и при преобразовании (3) она не изменилась.

Выражение (65) полностью совпадает с эрмитовым гамильтонианом, использованным в работе [8].

4.2. Построение оператора Ĥ для других гамильтонианов

Гамильтонианы (48), (59), как и гамильтониан (54), являются псевдоэрмитовыми.

Процедура построения эрмитова оператора Ĥ для гамильтонианов (48), (59) полностью аналогична изложенной выше процедуре для гамильтониана (54) и здесь она приводиться не будет.

В результате выполнения этой процедуры для гамильтониана (48) установлено, что, во-первых, для него оператор η равен

$$\eta = 1 + \frac{3}{2}\frac{M}{R} + \frac{M\left(J_{km}R_m\right)}{R^3}\gamma_0\gamma_k. \quad (66)$$

Во-вторых, возникающий в результате эрмитов гамильтониан совпадает с гамильтонианом (65).

В результате выполнения этой процедуры для гамильтониана (59) установлено, что, во-первых, для него оператор η равен

$$\eta = 1 + \frac{3}{2}\frac{M}{R} + \frac{1}{2}\frac{M\left(J_{km}R_m\right)}{R^3}\gamma_0\gamma_k. \quad (67)$$

Во-вторых, возникающий в результате эрмитов гамильтониан также совпадает с гамильтонианом (65).

4.3. Резюме по псевдоэрмитовым гамильтонианам

Подход, основанный на формализме псевдоэрмитовых гамильтонианов, приводит к стандартному аппарату квантовой механики. Возникающий в этом подходе результирующий гамильтониан имеет вид (65). Он

– не зависит от выбора системы реперов,

– является эрмитовым,

– имеет спектр собственных значений, совпадающий со спектром исходных гамильтонианов при любом выборе системы реперов.

От выбора системы реперов зависят амплитуды переходов. Амплитуды переходов могут быть найдены двумя способами. Либо надо произвести преобразование векторов состояния к выбранной системе реперов по правилу

$$\psi \to \psi' = \eta^+ \psi, \tag{68}$$

после чего пользоваться стандартными правилами вычисления скалярных произведений

$$(\varphi, \psi) \to (\varphi', \psi') = \int_V \left(\varphi^+ \rho \psi\right) d^3 x, \tag{69}$$

либо надо рассматривать правила (69) как скалярные произведения с весовыми множителями ρ. Для удобства величины ρ и η для трех систем реперов приведены в таблице. Напомним, что во всех трех рассмотренных системах реперов эрмитов гамильтониан $\hat{\text{H}}$ в формализме псевдоэрмитовых гамильтонианов имеет один и тот же вид и определяется формулой (65).

Величины ρ и η для трех систем реперов

Система реперов	Величина ρ	Величина η
«Киллинговая» (31)–(34)	$\rho = 1 + 3\dfrac{M}{R} + 2\dfrac{M\left(J_{km} R_m\right)}{R^3}\gamma_0 \gamma_k$	$\eta = 1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{R} + \dfrac{M\left(J_{km} R_m\right)}{R^3}\gamma_0 \gamma_k$
В калибровке ОСТ (50)–(53)	$\rho = 1 + 3\dfrac{M}{R}$	$\eta = 1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{R}$
В симметричной калибровке (55)–(58)	$\rho = 1 + 3\dfrac{M}{R} + \dfrac{M\left(J_{km} R_m\right)}{R^3}\gamma_0 \gamma_k$	$\eta = 1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{M}{R} + \dfrac{1}{2}\dfrac{M\left(J_{km} R_m\right)}{R^3}\gamma_0 \gamma_k$

5. Эрмитовость гамильтониана относительно скалярного произведения [2, 3]

5.1. Скалярное произведение по Паркеру

В этом разделе описывается более подробно другой возможный подход к построению эрмитового гамильтониана, с помощью которого можно исследовать движение частиц со спинами ½ в гравитационных полях. Этот подход основан на использовании скалярного произведения волновых функций, введенного в работах [2, 3] (это скалярное произведение будем называть скалярным произведением Паркера). Приведем некоторые вспомогательные соотношения, удобные при рассмотрении формализма Паркера.

Из (10), (13) следует, что оператором антиэрмитова сопряжения матриц γ_α с мировыми индексами является та же матрица $\gamma_{\underline{0}}$, которая выполняет эти функции для матриц $\gamma_{\underline{\alpha}}$ с реперными индексами. Таким образом,

$$\gamma^+_{\underline{\alpha}} = \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{\alpha}} \gamma_{\underline{0}}, \quad \gamma^+_{\alpha} = \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\alpha} \gamma_{\underline{0}}. \tag{70}$$

Используя (70), получаем:

$$\left(S_{\underline{\alpha\beta}}\right)^+ = \gamma_{\underline{0}} S_{\underline{\alpha\beta}} \gamma_{\underline{0}}, \quad \left(S_{\alpha\beta}\right)^+ = \gamma_{\underline{0}} S_{\alpha\beta} \gamma_{\underline{0}}, \quad \gamma_5^+ = -\gamma_{\underline{0}} \gamma_5 \gamma_{\underline{0}}. \tag{71}$$

Учитывая (71), а также то, что биспинорная связность Φ_α записывается как

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{4} \Phi_{\alpha\, \underline{\mu\nu}} S^{\underline{\mu\nu}}, \tag{72}$$

без потери общности можем записать, что

$$\left(\Phi_\alpha\right)^+ = \gamma_{\underline{0}} \Phi_\alpha \gamma_{\underline{0}} \to \Phi_\alpha = \gamma_{\underline{0}} \left(\Phi_\alpha\right)^+ \gamma_{\underline{0}}. \tag{73}$$

Ковариантные производные от дираковских матриц равны нулю:

$$\nabla_\mu \gamma_\alpha = \gamma_{\alpha;\mu} + \left[\Phi_\mu, \gamma_\alpha\right]_- = 0. \tag{74}$$

В то же время величины вида $\gamma_{\alpha;\,\mu}$, вообще говоря, не равны нулю; они определяются из соотношений (74).

В работах [2, 3] вводится следующее правило для вычисления скалярного произведения двух волновых функций φ и ψ:

$$(\varphi, \psi) = \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi\right). \tag{75}$$

Нетрудно заметить, что стоящая в правой части величина представляет собой не только инвариант относительно выбора реперов, но 4-мерный скаляр по отношению к преобразованиям мировых координат. В самом деле, для любых двух волновых функций φ и ψ можно ввести 4-мерный вектор

$$j^\alpha \equiv \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^\alpha \psi\right). \tag{76}$$

Выбираем 4-мерный объем V_4 и производим интегрирование по нему скаляра $j^\alpha{}_{;\alpha}$. Получаем скаляр $\int\limits_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\; j^\alpha{}_{;\alpha}$. Заметим, что ни скаляр $j^\alpha{}_{;\alpha}$, ни построенный интегральный скаляр нулю не равны. Интегральный скаляр может быть преобразован по теореме Гаусса. Если 4-мерное пространство выбрать так, чтобы ограничивающие его 3-мерные пространства были ортогональны вектору Киллинга, то из теоремы Гаусса будет следовать равенство

$$\int\limits_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\; j^\alpha{}_{;\alpha} = \int\limits_{V_3} d^3x\sqrt{-g}\; j^0. \tag{77}$$

Поскольку в левой части стоит скаляр, то и стоящая в правой части величина (φ, ψ) также должна быть мировым скаляром.

Заметим, что в случае плоского пространства реперные векторы могут быть отождествлены с касательными векторами к координатным линиям. В этом случае выражение для скалярного произведения (75) в декартовых координатах примет обычный для квантовой механики вид:

$$(\varphi, \psi) \to \int dx^3 \left(\varphi^+ \psi\right).$$

Это свойство величины (φ, ψ) можно рассматривать как проявление принципа соответствия.

5.2. Эрмитовость модифицированного гамильтониана

Рассмотрим вопрос об эрмитовости гамильтониана (19) относительно скалярного произведения (75), основываясь на результатах работы [3]. Доказательство проведем в общем виде без использования явных выражений для метрики и реперных векторов. Результаты будут справедливы при любом выборе реперов.

Рассмотрим выражение

$$\Delta \equiv \left(\varphi, (\hat{H}\psi)\right) - \left((\hat{H}\varphi), \psi\right). \tag{78}$$

Если нам удастся доказать, что при любых функциях φ и ψ выражение (78) для Δ тождественно равно нулю, то тем самым будет доказана эрмитовость гамильтониана относительно скалярного произведения (75).

Подставляем в (78) выражение для гамильтониана (19):

$$\Delta \equiv \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \left\{-\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\Phi_k\right\}\psi\right) -$$

$$- \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\left(\left\{-\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\Phi_k\right\}\varphi\right)^+ \gamma_{\underline{0}}\gamma^0\psi\right). \tag{79}$$

Здесь:

$$\Delta_1 = \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \left\{-\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\right\}\psi\right) - \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\left(\left\{-\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\right\}\varphi\right)^+ \gamma_{\underline{0}}\gamma^0\psi\right); \tag{80}$$

$$\Delta_2 = \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \left\{ \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\} \psi \right) - \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\left(\left\{ \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\} \varphi \right)^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right); \tag{81}$$

$$\Delta_3 = \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \left\{ -i\Phi_0 \right\} \psi \right) - \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\left(\left\{ -i\Phi_0 \right\} \varphi \right)^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right); \tag{82}$$

$$\Delta_4 = \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \left\{ \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \gamma^0 \gamma^k \Phi_k \right\} \psi \right) - \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\left(\left\{ \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \gamma^0 \gamma^k \Phi_k \right\} \varphi \right)^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right). \tag{83}$$

Вычислим каждый из четырех членов (80)–(83):

$$\Delta_1 = \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{im}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ -\left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma^0 \psi \right) - \left(\varphi^+ \gamma^{0+} \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right) \right\} = \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{im}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ -\left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma^0 \psi \right) - \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right) \right\} =$$

$$= \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{im}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ -g^{00} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \psi \right) + \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma^0 \psi \right) \right\} = \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{im}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ -g^{00} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \psi \right) + g^{00} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \psi \right) \right\} \equiv 0.$$

При вычислении Δ_1 мы воспользовались соотношениями (70) и двумя следующими соотношениями:

$$\gamma^0 \gamma^0 = g^{00}, \quad \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{0}} = -E. \tag{84}$$

Таким образом,

$$\Delta_1 = 0. \tag{85}$$

Переходим к вычислению Δ_2 :

$$\Delta_2 = \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \gamma^{k+} \gamma^{0+} \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right) \right\} =$$

$$= \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \gamma_{\underline{0}} \gamma^k \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right) \right\} =$$

$$= \int dx^3 \sqrt{-g} \, \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \left\{ g^{00} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + g^{00} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \gamma_{\underline{0}} \gamma^k \psi \right) \right\} =$$

$$= -i \int dx^3 \sqrt{-g} \left\{ \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^k \psi \right) \right\}_{;k} + i \int dx^3 \sqrt{-g} \left\{ \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^k{}_{;k} \psi \right) \right\}.$$

При вычислении Δ_2 мы воспользовались соотношениями (70) и двумя соотношениями (84). Учтем также, что полученный при вычислении Δ_2 интеграл от дивергенции сводится к интегралу по удаленной поверхности и, следовательно, обращается в нуль. Таким образом, выражение для Δ_2 сводится к виду

$$\Delta_2 = i \int dx^3 \sqrt{-g} \left\{ \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^k{}_{;k} \psi \right) \right\}.$$

С учетом (74) запишем это выражение как

$$\Delta_2 = -i \int dx^3 \sqrt{-g} \left\{ \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \left[\Phi_k , \gamma^k \right]_- \psi \right) \right\}. \tag{86}$$

Переходим к вычислению Δ_3 и Δ_4 :

$$\Delta_3 = i \int dx^3 \sqrt{-g} \left\{ \left(-\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \Phi_0 \psi \right) - \left(\varphi^+ \Phi_0{}^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right) \right\} = i \int dx^3 \sqrt{-g} \left\{ \left(-\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \Phi_0 \psi \right) - \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \Phi_0 \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{0}} \gamma^0 \psi \right) \right\} =$$

$$= i \int dx^3 \sqrt{-g} \left(\varphi^+ \gamma_{\underline{0}} \left[\Phi_0 , \gamma^0 \right]_- \psi \right).$$

Итак,

$$\Delta_3 = i\int dx^3 \sqrt{-g}\left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\left[\Phi_0, \gamma^0\right]_- \psi\right); \tag{87}$$

$$\Delta_4 = \int dx^3 \sqrt{-g}\,\frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\left\{\left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\gamma^0\gamma^0\gamma^k\Phi_k\psi\right) + \left(\varphi^+\Phi_k{}^+\gamma^{k+}\gamma^{0+}\gamma_{\underline{0}}\gamma^0\psi\right)\right\} =$$

$$= -i\int dx^3 \sqrt{-g}\,\left\{\left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\gamma^k\Phi_k\psi\right) - \left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\Phi_k\gamma^k\psi\right)\right\} = i\int dx^3 \sqrt{-g}\left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\left[\Phi_k, \gamma^k\right]_- \psi\right).$$

Итак,

$$\Delta_4 = i\int dx^3 \sqrt{-g}\left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\left[\Phi_k, \gamma^k\right]_- \psi\right). \tag{88}$$

Подставляя выражения (85)–(88) в (79), получаем:

$$\Delta \equiv \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = i\int dx^3 \sqrt{-g}\left(\varphi^+\gamma_{\underline{0}}\left[\Phi_0, \gamma^0\right]_- \psi\right). \tag{89}$$

Как видим, если под гамильтонианом понимать выражение (19), величина (89) не обращается в нуль, что свидетельствует о неэрмитовости этого оператора.

Легко, однако, заметить, что если уравнение (17) записать в виде

$$i\left(\nabla_0\Psi\right) = \hat{\mathbf{H}}\Psi, \tag{90}$$

где

$$\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} + \Phi_0, \tag{91}$$

$$\hat{\mathbf{H}} \equiv \hat{H} + i\Phi_0, \tag{92}$$

то из проведенных вычислений будет следовать эрмитовость оператора (92). Оператор $\hat{\mathbf{H}}$,

$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\Phi_k, \tag{93}$$

будем называть модифицированным гамильтонианом.

Для доказательства эрмитовости модифицированного гамильтониана в форме (93) нет необходимости записывать выражение (93) в какой-то конкретной системе реперов. Однако такая необходимость возникает на этапе нахождения эволюции волновой функции. Приведение модифицированного гамильтониана в форме (93) к конкретной системе реперов может быть произведено с использованием тех же приемов, которые были применены при получении гамильтонианов в системах реперов (31)–(34), (50)–(53), (55)–(58).

Можно показать, что помимо гамильтониана $\hat{\mathbf{H}}$ вида (93) и оператора $i\nabla_0$ свойством эрмитовости (в смысле скалярного произведения (75)) обладают:

– оператор обобщенного импульса $\hat{P}_k \equiv -i\nabla_k$;

– оператор, связанный с массой частицы $\dfrac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0$;

– оператор спина $i\gamma^5\gamma^0\gamma^k$;

– оператор киральности $i\gamma_5$.

5.3. Резюме по подходу Паркера

Подход Паркера, основанный на уравнении Шредингера в форме (90) и скалярном произведении (75), позволяет определять эволюцию векторов состояния и находить амплитуды переходов, т. е. получать ту информацию, которая требуется от квантово-механического рассмотрения.

Вместе с тем, запись уравнения (17) в форме уравнения (90) является по существу выделением ковариантной производной по времени в левой части уравнения Шредингера. В результате уравнение Шредингера (90) не имеет стандартной для квантовой механики формы, поскольку в левой части стоит не оператор $i\left(\partial/\partial t\right)$, а оператор $i\nabla_0$.

6. Обсуждение

Нам представляется, что полученные в данной работе результаты в части, касающейся псевдоэрмитовой квантовой механики, позволяют по-новому взглянуть на проблему описания квантовой динамики частиц со спином ½ в стационарных гравитационных полях.

Так, до этой работы, как нам представляется, не был решен вопрос о неоднозначности гамильтонианов и их зависимости от выбора системы реперов. Аппарат псевдоэрмитовой квантовой механики, примененный в данной работе, позволил решить этот вопрос, по крайней мере, для решений Шварцшильда и Керра. Доказано, что результирующий гамильтониан $\hat{\mathrm{H}}$, определяемый формулой (65), не зависит от выбора системы реперов и является эрмитовым. От выбора систем реперов зависят амплитуды переходов, их вычисление производится с использованием весовых множителей ρ, приведенных в таблице.

С нашей точки зрения, единственность гамильтониана $\hat{\mathrm{H}}$ является нетривиальным фактом. В самом деле, все три исходных выражения для гамильтонианов (48), (54), (59), во-первых, различаются между собой, во-вторых, не являются эрмитовыми. После стандартных процедур по переходу от исходных гамильтонианов $\hat{H}$ к соответствующим их эрмитовым выражениям $\hat{\mathrm{H}}$ эти выражения могли бы в принципе различаться на некоторые эрмитовы слагаемые. Но этого не происходит, во всех трех случаях выражения для $\hat{\mathrm{H}}$ совпадают. Такое совпадение выражений для $\hat{\mathrm{H}}$, не очевидное заранее, означает, что независимо от выбора системы реперов в гравитационном поле всегда существует единый для всех частиц со спином ½ физически выделенный гамильтониан $\hat{\mathrm{H}}$, обладающий тем же спектром уровней энергии, что и любой из исходных операторов $\hat{H}$.

После перехода к гамильтониану $\hat{\mathrm{H}}$ может быть использован аппарат квантовой механики в стандартной форме. В частности, в левой части уравнения Шредингера будет стоять оператор $i\left(\partial/\partial t\right)$, в котором под временной координатой t понимается время бесконечно удаленного наблюдателя.

Интересно заметить, что полученное в данной работе выражение для гамильтониана $\hat{\mathrm{H}}$ совпадает с тем, которое было предложено в работе [8] для поля Керра*. Формализм псевдоэрмитовых гамильтонианов является по существу обоснованием выражений для эрмитовых гамильтонианов, которые были использованы в работах [4, 8].

Формализм псевдоэрмитовой квантовой механики не является единственно возможным, в рамках которого может исследоваться движение частиц со спинами ½ в гравитационных полях. Альтернативный подход основан на использовании скалярного произведения волновых функций, введенного в работах [2, 3]. Этот подход, также изложенный в настоящей работе, позволяет определять эволюцию векторов состояния и находить амплитуды переходов, т. е. получать ту информацию, которая требуется от квантово-механического рассмотрения.

Если бы мы ставили задачу о нахождении решений уравнения Дирака, то метод псевдоэрмитовых гамильтонианов и метод [2, 3] в принципе были бы эквивалентны. Различие между обоими методами возникает, когда ставится задача о квантовании динамики частиц со спином ½ в гравитационном поле. Результаты данной работы позволяют утверждать, что метод псевдоэрмитовых гамильтонианов в отличие от метода [2, 3] допускает использование формализма релятивистской квантовой механики практически в стандартном виде. Нам представляется, что эта особенность метода псевдоэрмитовых гамильтонианов делает его использование предпочтительным в задачах, в которых выявляются эффекты гравитационного воздействия и оцениваются их количественные характеристики.

Список литературы

1. Arminjon M., Reifler F. A non-uniqueness problem of the Dirac theory in a curved spacetime. E-print arXiv:0905.3686v1 [gr-qc].

2. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.

3. Xing Huang, Parker L. Hermiticity of the Dirac Hamiltonian in Curved Spacetime, E-print arXiv:0811.2296v1 [hep-th].

4. Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forschr. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711; ArXiv: gr-qc/0012102.

5. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001.

6. Mostafazadeh A., Math J. // Phys. 2002. Vol. 43. P. 205, 2814. 3944.

7. Bagchi B., Fring A. Arxiv: hep-th/0907.5354v1.

8. Obukhov Yu. N., Silenko A. J., Teryaev O. V. Spin dynamics in gravitational fields of rotating bodies and the equivalence principle. E-print arXiv:0907.4367v1 [gr-qc].

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988.

---

*Сказанное о поле Керра справедливо и в отношении поля Шварцшильда, эрмитов гамильтониан для которого был предложен в работе [4].

10. Silenko A. J., Teryaev O. V. Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field // Physical Review. 2005. Vol. D71. P. 064016.

11. Arminjon M. Post-Newtonian equation for the energy levels of a Dirac particle in a static metric // Physical Review 2006. Vol. D74. P. 065017.

12. Khriplovich I. B. Spinning Relativistic Particles in External Fields. E-print arXiv: 0801.1881v1 [gr-qc].

13. Silenko A. J. Classical and Quantum Spins in Curved Spacetimes. E-print arXiv:0802.4443v1 [gr-qc].

14. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation. W.H. Freeman, San Francisco, 1973.

15. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.

16. Hehl F. W., Ni W. T. // Phys. Rev. 1990. Vol. D42. P. 2045.

Статья поступила в редакцию 13.05.2010