

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ ПРИ ОДНОРОДНОМ СЖАТИИ

А. Р. Гужова, О. Г. Синькова, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин

С помощью методики ТРЭК методом прямого 3D численного моделирования исследуется развитие турбулентного перемешивания при однородном сжатии газового объема. Результаты сравниваются с решениями данной задачи исходя из  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности, полученными как аналитически, так и численно, при помощи 2D методики ЭГАК. Аналитические решения получены как для сферической геометрии, так и для цилиндрической и плоской.

### Введение

В настоящее время основным методом моделирования турбулентности в инженерных расчетах является метод, основанный на применении эмпирических и полумпирических моделей турбулентности, среди которых наиболее широкое распространение получили  $k$ - $\epsilon$  модели в силу их достаточной эффективности и простоты. Однако для этой модели необходимо выполнять ее тестирование и осуществлять подбор констант для каждого более-менее представительного класса задач. Одна из таких моделей [1] реализована в коде ЭГАК [2], подбор констант для которой для ряда течений проведен в работе [3].

В то же время все большее развитие получает прямое численное моделирование турбулентности по 3D кодам [4–14], которое позволяет получать широкий спектр характеристик турбулентности без применения каких-либо эмпирических моделей турбулентности. Применение этого подхода ограничивается возможностями существующих компьютеров, однако в простейших задачах он может использоваться для получения характеристик турбулентности, не доступных как для экспериментальных методов, так и феноменологических моделей. Примеры прямых 3D численных исследований турбулентности по коду ТРЭК [4] для ряда течений содержатся в работах [5–14].

Исходя из вышесказанного, рассматриваемая задача представляет значительный методический интерес по следующим причинам. Во-первых, исследуемый тип течения характерен для множества турбулентных течений. Во-вторых, для нее удалось получить аналитическое решение уравнений  $k$ - $\epsilon$  модели, описанных в работе [1]. В-третьих, в силу относительной простоты задачи для нее проведено и прямое численное моделирование по коду ТРЭК [4].

Сравнение между собой результатов, полученных двумя указанными численными методами, позволяет

оценить правильность описания турбулентности в данной задаче каждым из этих методов. В частности, близость результатов может свидетельствовать об адекватности описания данного течения обоими методами.

### 1. Общая постановка задачи

Начальный объем газа: сфера радиусом  $R_0 \equiv R(t=0) = 1$  для сферически-симметричной задачи, цилиндр радиусом  $R_0 \equiv R(t=0) = 1$  для цилиндрически симметричной задачи и плоский слой толщиной  $R_0 \equiv R(t=0) = 1$  для плоской задачи. Начальное давление  $P_0 \equiv P(t=0) = 1$  и плотность  $\rho_0 \equiv \rho(t=0) = 1$  постоянны по этому объему. УРС идеального газа  $e = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$ ,  $\gamma = 1,2$ .

Предполагается постоянство по объему и времени дивергенции скорости

$$\operatorname{div} \vec{u} \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \operatorname{const} \equiv d_u = \frac{1}{r^s} \frac{\partial}{\partial r} (r^s u_r), \quad (1)$$

здесь  $s$  – индекс симметрии:  $s = 0$  в плоской задаче,  $s = 1$  в цилиндрической и  $s = 2$  в сферической.

Интегрируя (1), умноженное на  $r^s$ , по  $r$  от 0 до  $r$ , получим

$$u_r = \frac{d_u r}{s+1}. \quad (2)$$

Полагаем

$$d_u(t=0) \equiv d_{u0} \equiv -\frac{s+1}{B}, \quad (3)$$

тогда из (2) следует, что начальный профиль скорости имеет следующий вид:

$$u_r(t=0) = \frac{d_{u0} r}{s+1}. \quad (4)$$

## 2. Аналитическое решение для сжатия

Уравнение движения

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ikT}}{\partial x_k}, \quad (5)$$

где тензор напряжений Рейнольдса  $\sigma_{ijT} \equiv -\overline{\rho u'_i u'_j}$ , аппроксимируем как обычно [15]

$$\sigma_{ijT} = \rho v_T \left( \frac{du_j}{dx_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ji} \equiv \rho v_T S_{ij} - P_T \delta_{ji}. \quad (6)$$

Здесь  $v_T$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости,  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформации,  $P_T$  – турбулентное давление, которые выражаются следующим образом:

$$v_T = c_D \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad S_{ij} \equiv \frac{du_j}{dx_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad P_T \equiv \frac{2}{3} \rho k,$$

где  $k$  – турбулентная энергия,  $\varepsilon$  – скорость ее диссипации.

Учитывая, что плотность, давление и все турбулентные величины постоянны по объему, имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ikT}}{\partial x_k} = v_T \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = v_T \left( \frac{d^2 u_i}{dt} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \bar{u} \right). \quad (7)$$

Учтем также, что

$$\frac{d^2 u_i}{dx_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \bar{u} - \text{rot} \cdot \text{rot} \bar{u}. \quad (8)$$

Поскольку  $\text{div} \bar{u}$  также постоянна по объему, то из (8), (7), (5) следует

$$\frac{du_i}{dt} = 0. \quad (9)$$

Отсюда и из соотношения (2) получаем уравнение

$$\dot{d}_u + d_u^2 / (s+1) = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) имеет вид

$$d_u = \frac{1}{1/d_{u0} + t/(s+1)} = -\frac{s+1}{B-t}. \quad (11)$$

Отсюда и из выражения (2) следует

$$u_r = -\frac{r}{B-t}. \quad (12)$$

Уравнение (12) дает выражения для радиуса границы  $r = R$  и плотности

$$R = R_0 (1-t/B) = R_0 (d_{u0} t / (s+1) + 1), \quad (13)$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R_t} \right)^{s+1}, \quad (14)$$

а также и давления, если найти значение удельной энергии  $e$  и учесть УРС.

В случае использования к-ε модели уравнение для  $e$  имеет вид:

$$\dot{e} \equiv \frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \dot{\rho} + \varepsilon, \quad (15)$$

где  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной энергии. Ниже будет приведено аналитическое выражение для внутренней энергии, при получении которого мы пренебрегли влиянием диссипации в (15).

## 3. Аналитическое решение для к-ε модели

Уравнения к-ε модели имеют вид [3]. Уравнение для турбулентной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho k u_k) = \\ = (G_1 + G_2) - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho c_k v_T \frac{\partial k}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

для скорости диссипации

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \varepsilon u_k) = \\ = \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} G_1 + c_{\varepsilon 2} G_2 - c_{\varepsilon 3} \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho c_{\varepsilon} v_T \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

здесь  $G_2$  – гравитационное порождение турбулентности:  $G_2 = a_k \frac{\partial P}{\partial x_k}$ ,  $a_k = c_e v_T \left( \frac{1}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)$ . В данной задаче, очевидно,  $G_2 = 0$ .

Сдвиговое порождение турбулентности

$$G_1 = \sigma_{jkT} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \quad (18)$$

Тогда уравнение для турбулентной энергии (16) принимает вид

$$\dot{k} + \varepsilon = \frac{G_1}{\rho} = -\frac{2}{3} k \text{div} \bar{u} = -\frac{2}{3} k d_u. \quad (19)$$

Обозначим

$$\omega \equiv \frac{\varepsilon}{k}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (19) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\dot{k}}{k} = (\ln k) \dot{=} = -\frac{2}{3} d_u - \omega. \quad (21)$$

Аналогично уравнение (17) для  $\varepsilon$  принимает вид

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = (\ln \varepsilon) \dot{=} = -\left( c_{\varepsilon 1} \frac{2}{3} d_u + c_{\varepsilon 3} \omega \right). \quad (22)$$

Уравнение для  $\omega$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\omega}}{\omega} = (\ln \omega) \dot{=} = (\ln \varepsilon) \dot{=} - (\ln k) \dot{=} = \\ = \frac{2}{3} d_u (1 - c_{\varepsilon 1}) + \omega (1 - c_{\varepsilon 3}). \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначив  $\xi = \frac{1}{\omega \tau}$ , где  $\tau \equiv (B - t)$ , можно переписать (23) в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{(1-A)\xi + C}{\tau}, \quad (24)$$

где  $A = 2(c_{\varepsilon 1} - 1)$ ,  $C = c_{\varepsilon 3} - 1$ .

Решение уравнения (24) с учетом (11) имеет вид

$$\omega = \frac{1-A}{\tau T}, \quad (25)$$

здесь  $T \equiv (D\tau^{A-1} - C)$ ,  $D \equiv B^{1-A} \left( C + \frac{1-A}{\omega_0 B} \right)$ .

Уравнение для турбулентного пространственного масштаба  $\Lambda \equiv \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} &= (\ln \Lambda) \dot{} = \frac{3}{2} (\ln k) \dot{} - (\ln \varepsilon) \dot{} = \\ &= \frac{2}{3} d_u \left( c_{\varepsilon 1} - \frac{3}{2} \right) + \omega \left( c_{\varepsilon 3} - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая, что  $c_{\varepsilon 1} = 1,15$ ,  $c_{\varepsilon 3} = 1,7$  (см. [3]), а  $d_u < 0$  при однородном сжатии, из (26) следует возрастание  $\Lambda$ .

Точное решение уравнения (21) с учетом (25) имеет вид:

$$k = k_0 \left( \frac{B}{\tau} \right)^{2 + \frac{1-A}{C}} \left( \frac{T}{DB^{A-1} - C} \right)^{-1/C}. \quad (27)$$

После этого с учетом (20), (25), (27) находится решение для  $\varepsilon$ .

Дифференцируя выражение для  $v_T = c_D \frac{k^2}{\varepsilon}$ , а также учитывая (21) и (22), получим уравнение для коэффициента турбулентной вязкости  $v_T$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}_T}{v_T} &= (\ln v_T) \dot{} = 2(\ln k) \dot{} - (\ln \varepsilon) \dot{} = \\ &= -\frac{2}{3} d_u (2 - c_{\varepsilon 1}) + \omega (c_{\varepsilon 3} - 2). \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая, что  $c_{\varepsilon 1} = 1,15$ ,  $c_{\varepsilon 3} = 1,7$ , а  $d_u < 0$  при однородном сжатии, из (28) следует возрастание  $v_T$  в рассматриваемом случае.

В начальный момент турбулентная энергия изменяется со временем (как в первом приближении следует из формулы (27)) по асимптотическому закону

$$k \approx k_0 \left[ 1 + t \left( \frac{2}{B} - \omega_0 \right) \right], \quad (29)$$

т. е. при  $\omega_0 = \frac{\varepsilon_0}{k_0} > \omega_{0k} \equiv \frac{2}{B}$  она убывает со временем,

при достаточно же малом значении  $\omega_0$  стадия убывания отсутствует.

Убывание турбулентной энергии сменяется ее возрастанием в некоторый момент  $t_{\min} = B - \tau_{\min}$ , где

$$\frac{1}{\tau_{\min}^{1-A}} = \frac{C}{D} \left( 1 + \frac{1-A}{2C} \right) \quad (30)$$

также определяется величиной  $B$  и начальным значением  $\omega_0$ .

При достаточной близости к моменту  $t_m = B$  (т. е.  $\tau \rightarrow 0$ ) максимального (бесконечно большого) сжатия

справедливо приближенное асимптотическое решение для этой стадии, следующее из (27):

$$k \approx k_0 \left( \frac{1-A}{\omega_0 D} \right)^{1/C} \frac{B^{2-A/C}}{\tau^2}. \quad (31)$$

Асимптотические решения (29), (31) показаны на рис. 1 для двух вариантов начальных значений:  $k_0 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 1,1 \cdot 10^{-2}$  и  $k_0 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,3$ , характерных для двух вариантов начальной амплитуды пульсаций скорости при прямом численном моделировании задачи (см. раздел 6)  $u' = 0,03$  и  $u' = 0,1$  соответственно. Как следует из рис. 1, момент достижения минимума в первом варианте  $t_{\min} = 0,365$ , во втором  $t_{\min} = 0,394$  – в полном согласии с формулой (30). Отметим, что эти значения близки к максимальным моментам времени, достигаемым при прямом численном моделировании задачи. Можно видеть, что величина  $\frac{\varepsilon_0}{k_0}$  в первом варианте (соответствующем  $u' = 0,03$ ) меньше, а следовательно ближе к критическому значению  $\omega_{0k}$ .

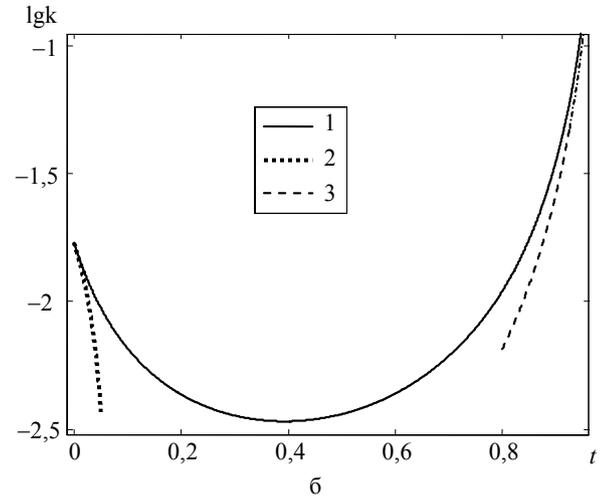
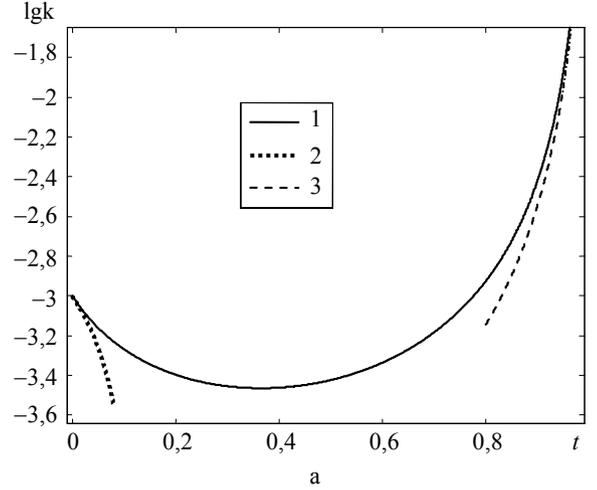


Рис. 1. Зависимости от времени турбулентной энергии: а –  $k_0 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 1,1 \cdot 10^{-2}$ ; б –  $k_0 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,3$ ; 1 – точное решение (27); 2 – асимптотическое решение (29); 3 – асимптотическое решение (31)

#### 4. Расчет с $k$ - $\varepsilon$ моделью по методике ЭГАК

Для сферической задачи рассматриваются два набора начальных значений турбулентных величин.

Первый вариант:  $k_0 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ . Эти значения обеспечивают малость турбулентного масштаба времени

$$\tau_t = \frac{k_0}{\varepsilon_0} = 10^{-2} \text{ и пространственного масштаба } \Lambda_t = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0} = 10^{-4}.$$

Второй вариант:  $k_0 = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ . Турбулентные масштабы:  $\tau_t = \frac{k_0}{\varepsilon_0} = 10^{-2}$ ,  $\Lambda_t = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0} = 10^{-3}$  также малы относительно масштабов задачи.

Результаты расчетов приводятся на рис. 2–4 в виде зависимостей различных величин от времени. Как видно из рис. 2, 3, наблюдается хорошее согласие турбулентных величин и плотности для обоих вариантов. В то же время, как видно из рис. 4, наблюдается малое, но заметное превышение давления в расчете с большим  $\varepsilon_0$  над соответствующим аналитическим решением, в то время как в расчете с малым  $\varepsilon_0$  подобное отличие практически незаметно. Причиной такого различия является увеличение внутренней энергии, а значит, и давления (плотность не изменяется из-за постоянства дивергенции средней скорости (см. рис. 3,д), вследствие увеличения диссипации турбулентной энергии.

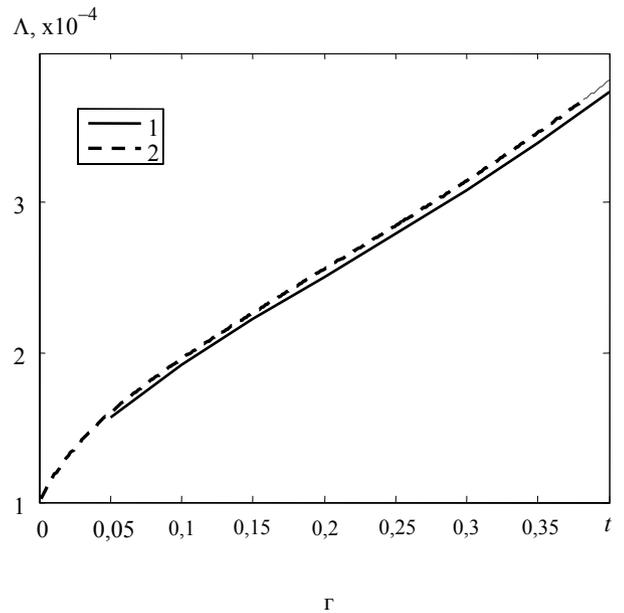
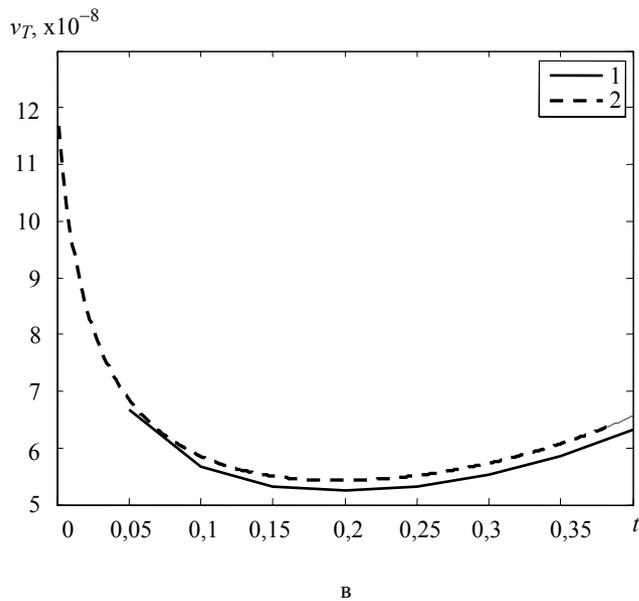
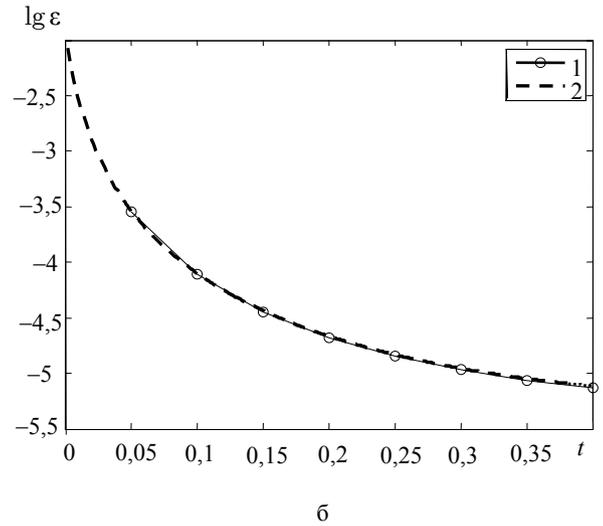
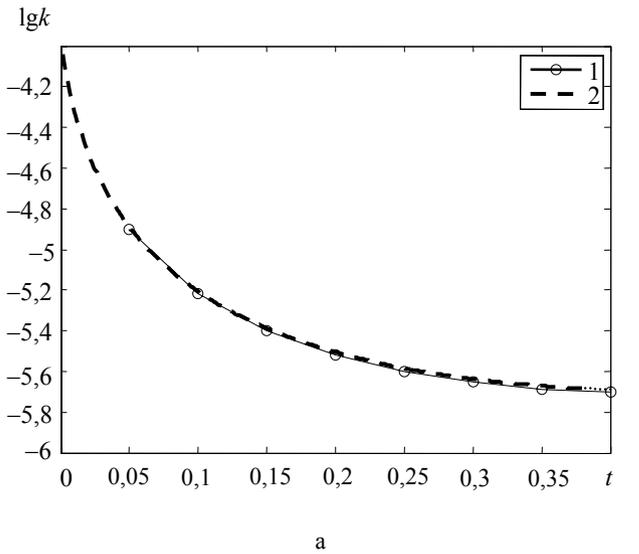
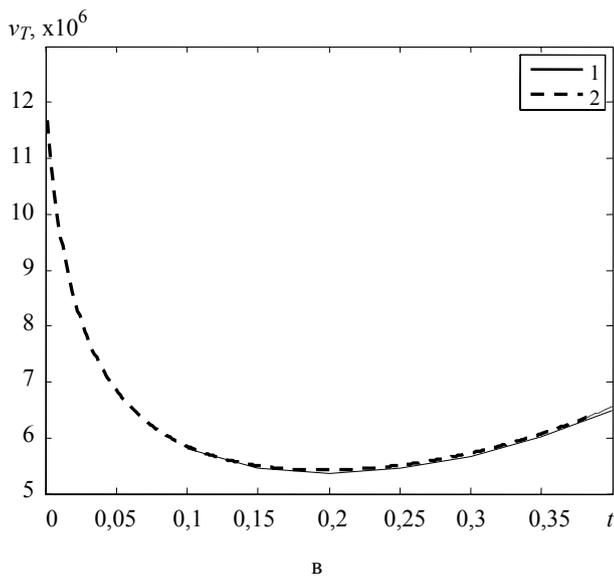
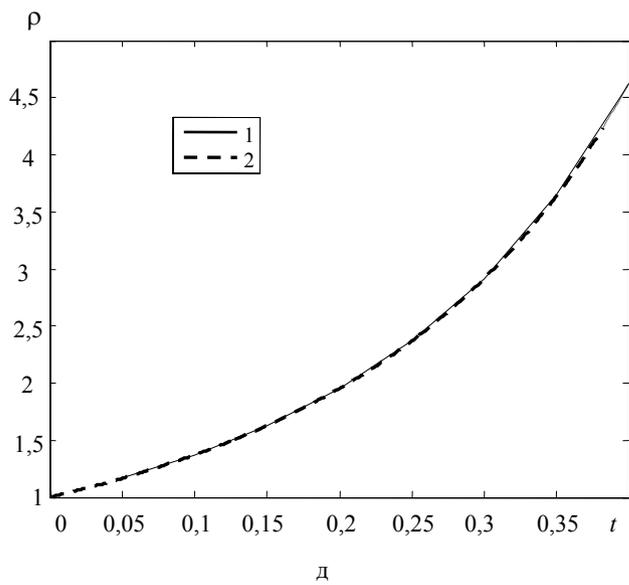


Рис. 2. Зависимости величин  $k$  (а);  $\varepsilon$  (б);  $v_T$  (в);  $\Lambda$  (г);  $\rho$  (д) от времени,  $k_0 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ : 1 – ЭГАК, 2 – аналитическое решение (продолжение см. на с. 64)



Окончание рис. 2

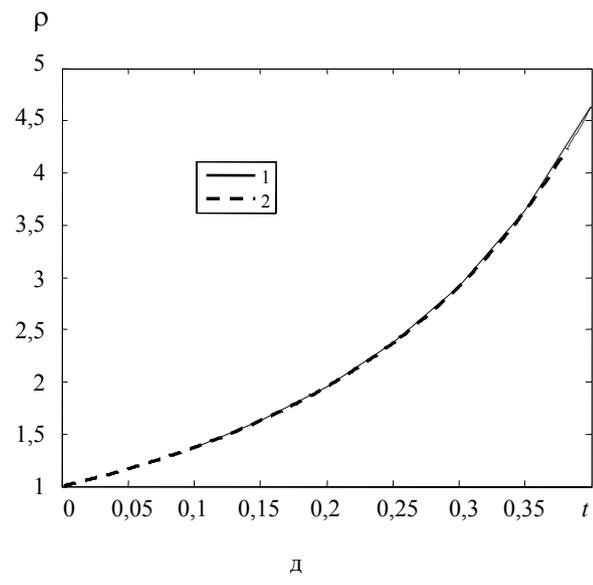
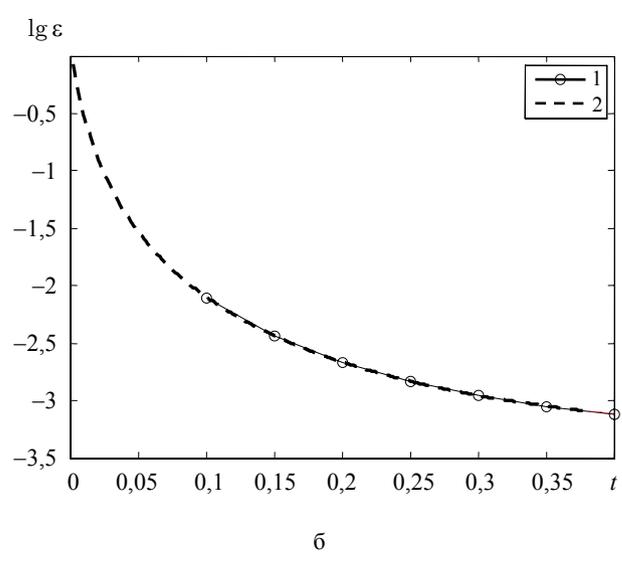
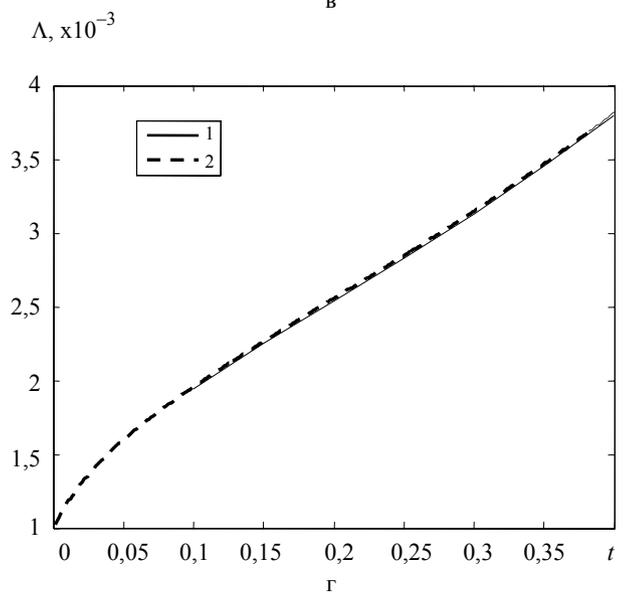
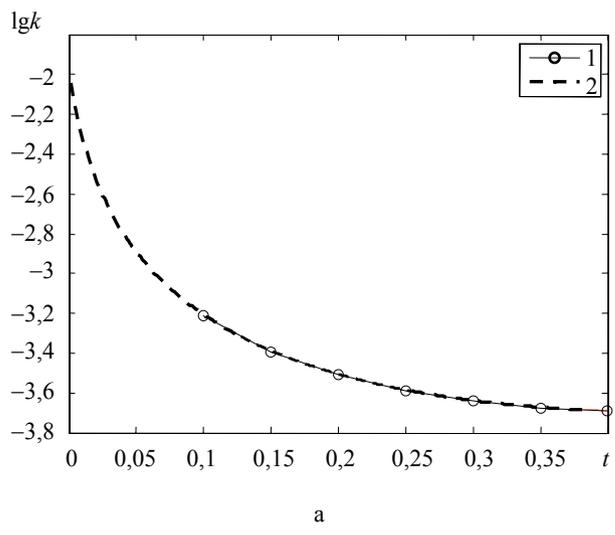


Рис. 3. Зависимости величин  $k$  (а);  $\epsilon$  (б);  $\nu_T$  (в);  $\Lambda$  (г);  $\rho$  (д) от времени,  $k_0 = 10^{-2}$ ,  $\epsilon_0 = 1$ : 1 – ЭГАК, 2 – аналитическое решение

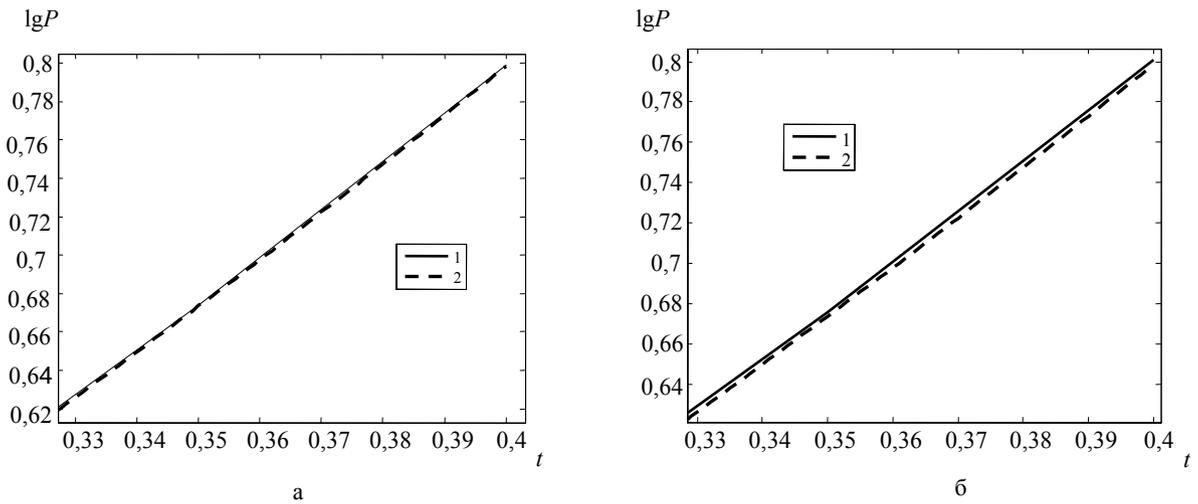


Рис. 4. Зависимость от времени давления. а –  $k_0 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ , б –  $k_0 = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ;  
1 – ЭГАК, 2 – аналитическое решение

## 5. Прямое численное моделирование

### 5.1. Постановка расчета

3D расчет выполнен на прямоугольной счетной сетке. Начальный профиль скорости складывается из среднего профиля (12) с  $\mathbf{B} = 1$  и случайных пульсаций  $|\Delta\bar{u}|$  с постоянной по всему объему амплитудой  $u' \equiv |\Delta\bar{u}|$ . Знак пульсации для каждой компоненты скорости задавался с помощью генератора случайных чисел. Величина  $u'$  варьировалась от 0,03 до 0,1.

### 5.2. Обработка результатов

**Численная обработка результатов.** В результате расчета имеем 3D массивы:

$$\vec{r} = \{x, y, z\}, \quad u_r = \frac{\bar{u}\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{u_x x + u_y y + u_z z}{r}. \quad (32)$$

Выдавались осредненные по сферическому слою толщиной размера ячейки различные величины, а также радиусы слоев  $r$ . Осреднение производится для следующих величин:

$$\langle \rho \rangle; \quad \langle e \rangle; \quad \langle u_r \rangle; \quad \langle \bar{u}'^2 \rangle = \langle u_r'^2 \rangle - \langle u_r \rangle^2, \quad (33)$$

$$\langle \bar{u}'^2_{(n)} \rangle = \langle \bar{u}^2_{(n)} \rangle - \langle \bar{u}_{(n)} \rangle^2. \quad (34)$$

Здесь  $\bar{u}_{(n)}$  – проекция полного вектора скорости  $\bar{u}$  на поверхность шарового слоя. В силу симметрии задачи  $\langle \bar{u}_n \rangle = 0$  из (34) следует

$$\langle \bar{u}'^2_{(n)} \rangle = \langle \bar{u}^2_{(n)} \rangle. \quad (35)$$

Но величина  $\bar{u}^2_{(n)}$  может быть записана в виде  $\bar{u}^2_{(n)} = \bar{u}^2 - u_r^2$ . Отсюда и из (35) следует

$$\langle \bar{u}'^2_{(n)} \rangle = \langle \bar{u}^2 \rangle - \langle u_r^2 \rangle. \quad (36)$$

Отметим, что при изотропной турбулентности должно быть

$$\langle \bar{u}'^2_{(n)} \rangle = 2 \langle u_r'^2 \rangle. \quad (37)$$

Полная же величина турбулентной энергии

$$k = \left( \langle \bar{u}'^2_{(n)} \rangle + \langle u_r'^2 \rangle \right) / 2. \quad (38)$$

**Фурье-анализ результатов.** Значение интегрального пространственного масштаба турбулентности можно также извлечь из спектральных характеристик турбулентности. Как известно [15],

$$\Lambda_{\text{int}} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} K^{-1} F_1(K) dK}{\int_0^{\infty} F_1(K) dK}, \quad (39)$$

где  $F_1(K)$  – одномерный спектр (одномерная спектральная плотность трехмерной турбулентности),  $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$  – волновой вектор.

В нашем случае, когда волновой вектор  $K_i = \frac{2\pi i}{L}$  ( $L = Nh$ ,  $N$  – число узлов на отрезке  $L$ ) ограничен сверху и снизу за счет конечности размера счетного шага  $h$  и размера турбулентной области  $L$ , интегралы в (39) заменяем суммами и имеем

$$\Lambda_{\text{int}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i=1}^{i=\max} F_1(K_i) / K_i}{\sum_{i=1}^{i=\max} F_1(K_i)}. \quad (40)$$

Из спектральных характеристик турбулентности можно также извлечь спектральное значение  $\varepsilon$ . Известно [15], что в инерциальном интервале трехмерной турбулентности одномерная спектральная плотность пульсаций скорости  $E(K)$  для колмогоровского спектра имеет вид

$$E(K) = 4\pi K^2 F(K) = C\varepsilon^{2/3} K^{-5/3}, \quad (41)$$

где  $C \approx 1,4$ ,  $F(K)$  – трехмерная спектральная плотность. Из (41) видно, что  $E(K)$  представляет одномерную спектральную плотность в трехмерном волновом пространстве, т. е. для всех трех компонент скорости.

Наряду с  $E(K)$  имеется (см. [15]) другая одномерная спектральная плотность  $F_1(K)$  в одномерном волновом пространстве, т. е. для одной из трех компонент скорости

$$F_1(K_1) = 2\pi \int_{K_1}^{\infty} F(K) K dK. \quad (42)$$

Отсюда и из (41) следует

$$F_1(K_1) = \frac{C}{2} \varepsilon^{2/3} \int_{K_1}^{\infty} K^{-8/3} dK = C_1 \varepsilon^{2/3} K_1^{-5/3}, \quad (43)$$

где  $C_1 = 0,3C$ . Напомним, что по-прежнему предполагается, что существует интервал волновых чисел, где реализуется колмогоровский спектр, т. е.  $\varepsilon(K) \approx \text{const}$ .

В той части интервала волновых чисел, где реализуется колмогоровский спектр, спектральная турбулентная энергия одной ( $i$ -й) компоненты скорости, т. е. энергия всех ее пульсаций с волновыми числами  $K' \geq K$ , равна

$$\begin{aligned} E_{t(i)}(K) &= \left\langle u_{(i)}^2(K)/2 \right\rangle_{K_{\min}}^{K_{\max}} = \\ &= \int_K^{K_{\max}} F_{1(i)}(K') dK' = \\ &= C_1 \cdot \varepsilon^{2/3} \int_K^{K_{\max}} K'^{-5/3} dK' = \\ &= \frac{3}{2} C_1 \varepsilon^{2/3} \left( K^{-2/3} - K_{\max}^{-2/3} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь использовано  $\varepsilon(K') \approx \text{const}$ , а также учтено, что

$$\begin{aligned} \left\langle u_{(i)}^2(K) \right\rangle_{K_{\min}}^{K_{\max}} &= \int_{-K_{\max}}^K F_{1(i)}(K') dK' + \\ &+ \int_K^{K_{\max}} F_{1(i)}(K') dK' = 2 \int_K^{K_{\max}} F_{1(i)}(K') dK'. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь в нашем случае дискретного набора координат ( $n_{\max}$  точек на отрезке  $L$ ) и волновых чисел:  $K_{\max} =$

$= \frac{2\pi}{L} n_{\max}$ . Тогда (44) можно записать

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} C_1 \left( \varepsilon_{(i)}(K_n) \right)^{2/3} \left( K_n^{-2/3} - K_{n_{\max}}^{-2/3} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{L} \sum_{l=n}^{n_{\max}} F_{1i}(K_l), \quad l < n_{\max}, \quad h = L/n_{\max}. \end{aligned} \quad (46)$$

Отсюда по спектру  $F_{1(i)}(K_l)$  можно найти  $\varepsilon_{(i)}(K_l)$ , имеющее, однако, смысл лишь при  $\varepsilon(K) \approx \text{const}$ . Проведем аналогичную процедуру, используя в (46) в качестве  $F_{1i}$  величину  $F_1$  в выражении (43) для одномерного колмогоровского спектра, что дает вместо  $\varepsilon_{(i)}(K_l)$  функцию  $\varepsilon_{(K)}(K_l)$ . Следовательно, профили  $\varepsilon_{(i)}(K_l)$  нужно приблизить колмогоровским спектром, характеризуемым величиной  $\varepsilon_{(K)}(K_l)$ , как показано на рис. 5–13, чтобы достигалась наилучшая аппроксимация всех компонент. Именно величина  $\varepsilon_K(K)$  (точнее, ее постоянное значение, на которое она выходит) дает один способ нахождения диссипации. Другой способ, приводящий к близким результатам, заключается в применении соотношения (43) для нахождения диссипации

$$\varepsilon = \left( \frac{F_1 K_1}{C_1} \right)^{3/2} K^{5/2} \quad (47)$$

и последующем осреднении как по спектру, так и по компонентам.

Далее фурье-анализ будет выполнен для отрезков на оси  $OX$  и  $OY$  в сечении  $Z = 0$  внутренней области сферы, в которой постоянны значения гидродинамических величин. При этом формула (44) дает следующие величины поперечных рассматриваемому отрезку скоростей:

$$\begin{aligned} k_{zx} &= \left\langle u_z'^2/2 \right\rangle_{K_{\min}}^{K_{\max}}, \quad k_{yx} = \left\langle u_y'^2/2 \right\rangle_{K_{\min}}^{K_{\max}}, \\ k_{zy} &= \left\langle u_z'^2/2 \right\rangle_{K_{\min}}^{K_{\max}}, \quad k_{xy} = \left\langle u_x'^2/2 \right\rangle_{K_{\min}}^{K_{\max}}. \end{aligned}$$

Полагая приближенную изотропность пульсаций (т. е. считая, например, продольную компоненту  $k_{xx}$  равной полусумме соответствующих поперечных компонент  $k_{zx}$  и  $k_{yx}$ ), можно получить значения турбулентной энергии по оси  $OX$  и  $OY$  соответственно:

$$k_x = \frac{3}{2} (k_{zx} + k_{yx}), \quad k_y = \frac{3}{2} (k_{zy} + k_{xy}). \quad (48)$$

Полной же поперечной компоненте турбулентной энергии  $\left\langle \bar{u}_{(n)}'^2 \right\rangle / 2 = \left\langle u_r'^2 \right\rangle$  соответствуют величины:

$$k_{nx} = k_{zx} + k_{yx}, \quad k_{ny} = k_{zy} + k_{xy}. \quad (49)$$

## 6. Обработанные результаты 3D расчетов

### 6.1. Амплитуда пульсаций скорости $u' = 0,03$

Из формулы (13) видно, что имеется уменьшающийся со временем интервал радиусов, на котором профиль радиальной скорости близок к линейному, а значения плотности и удельной энергии постоянны.

Именно на этих интервалах проведем фурье-анализ пульсаций скорости. Результаты фурье-анализа для различных моментов времени показаны на рис. 5, 6.

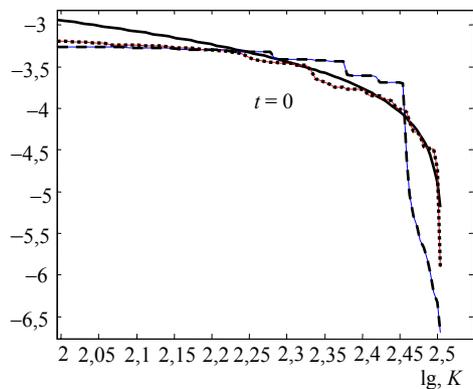
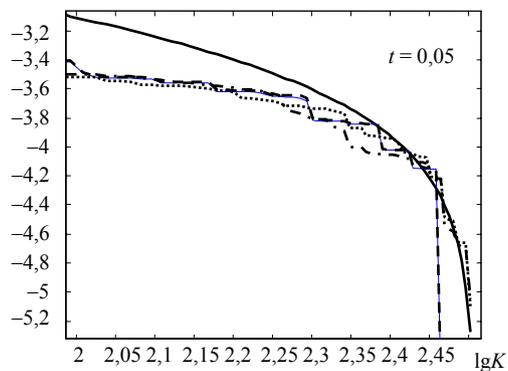
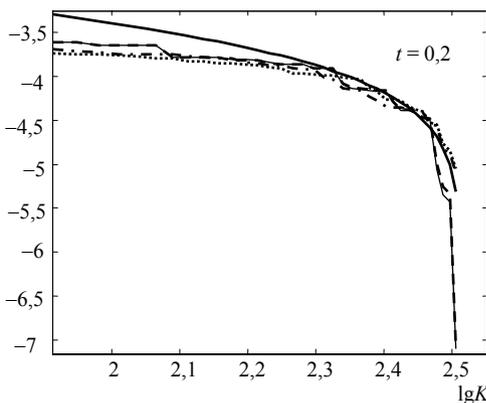
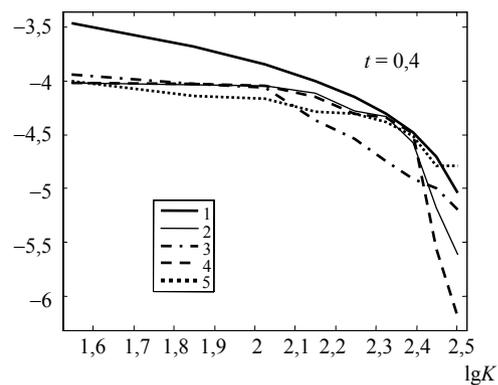
$\lg \langle u_{(i)}^2 \rangle$  $\lg \langle u_{(i)}^2 \rangle$  $\lg \langle u_{(i)}^2 \rangle$  $\lg \langle u_{(i)}^2 \rangle$ 

Рис. 5. Одномерные энергетические спектры пульсаций различных компонент скорости:

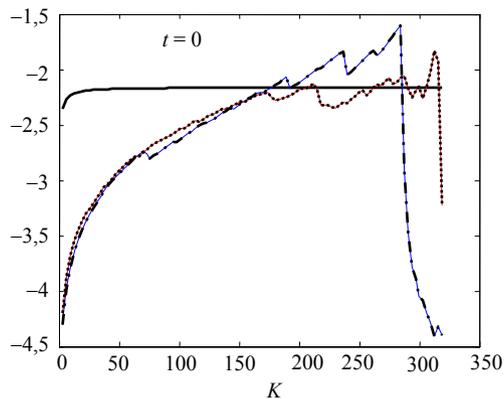
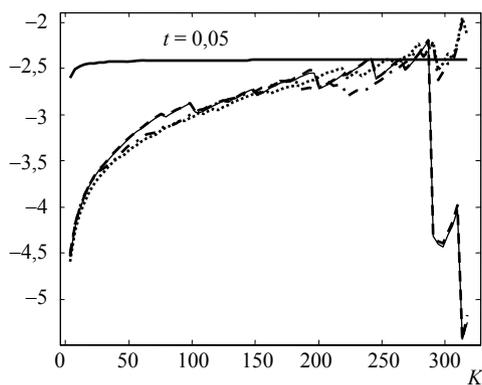
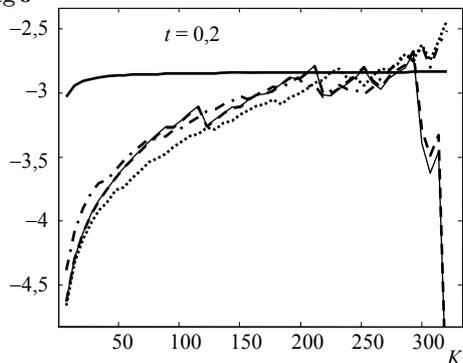
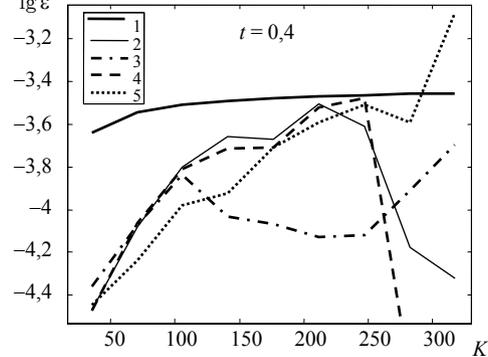
1 – Колмогоров; 2 –  $2k_{zx}$ ; 3 –  $2k_{zy}$ ; 4 –  $2k_{yx}$ ; 5 –  $2k_{xy}$  $\lg \varepsilon$  $\lg \varepsilon$  $\lg \varepsilon$  $\lg \varepsilon$ 

Рис. 6. Спектры скорости диссипации для пульсаций различных компонент скорости

1 – Колмогоров; 2 –  $2k_{zx}$ ; 3 –  $2k_{zy}$ ; 4 –  $2k_{yx}$ ; 5 –  $2k_{xy}$

Как видно из рис. 5, 6, при  $t = 0$  имеются две пары кривых, в каждой из которых обе кривые совпадают по условию задания начальных значений. При этом наблюдается приближение со временем к колмогоровскому спектру вплоть до последних моментов, когда сказывается ограниченность числа ячеек, приходящихся на указанный интервал.

**Зависимости от времени гидродинамических и турбулентных величин.** На рис. 7 приводятся зависимости от времени, плотности и давления, полученные в 3D расчете, которые практически совпадают с аналитическим решением. На рис. 8 приводятся зависимости от времени турбулентной энергии. Видно, что к моменту  $t = 0,05$  результаты 3D расчета сближаются с аналитическим решением, полученным по  $k$ - $\varepsilon$  модели. Напротив, на последних моментах ( $t \approx 0,35-0,4$ ) намечается расхождение с аналитическим решением. Оно может объясняться тем, что на эти моменты на анализируемую область в 3D расчете приходится уже недостаточное число счетных ячеек.

При этом небольшое отличие результатов 3D расчета, полученных с помощью разных способов обработки, соответствует отличию в 20 % для начальной величины диссипации, задаваемой в решении по  $k$ - $\varepsilon$  модели.

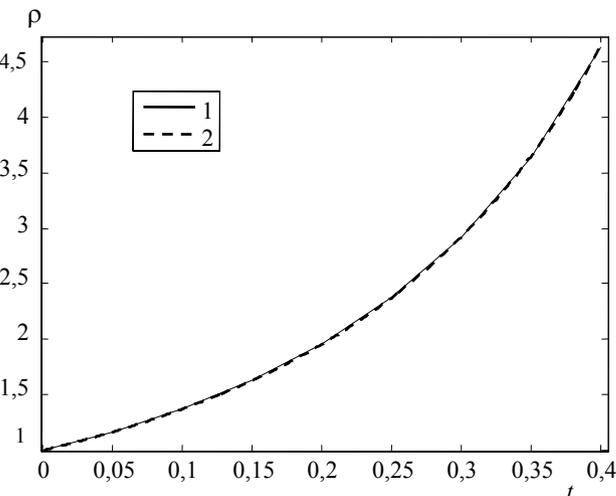
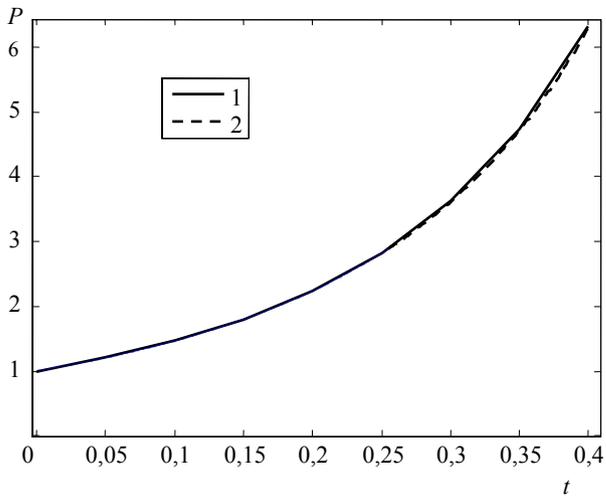


Рис. 7. Зависимости от времени давления  $P$  и плотности  $\rho$ : 1 – ТРЭК; 2 – аналитическое решение

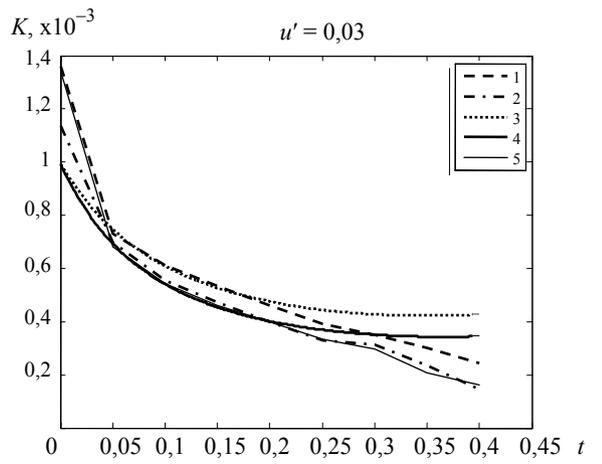


Рис. 8. Зависимости от времени турбулентной энергии. 3D расчет: 1 – по формуле (37); 2 –  $k_x$  по формуле (47); 3 –  $k_y$  по формуле (47);  $k$ - $\varepsilon$  модель: 4 –  $k_0 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 1,1 \cdot 10^{-2}$ ; 5 –  $k_0 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,9 \cdot 10^{-2}$

Зависимости от времени отдельных компонент турбулентной энергии, полученных из 3D расчета, приведены на рис. 9.

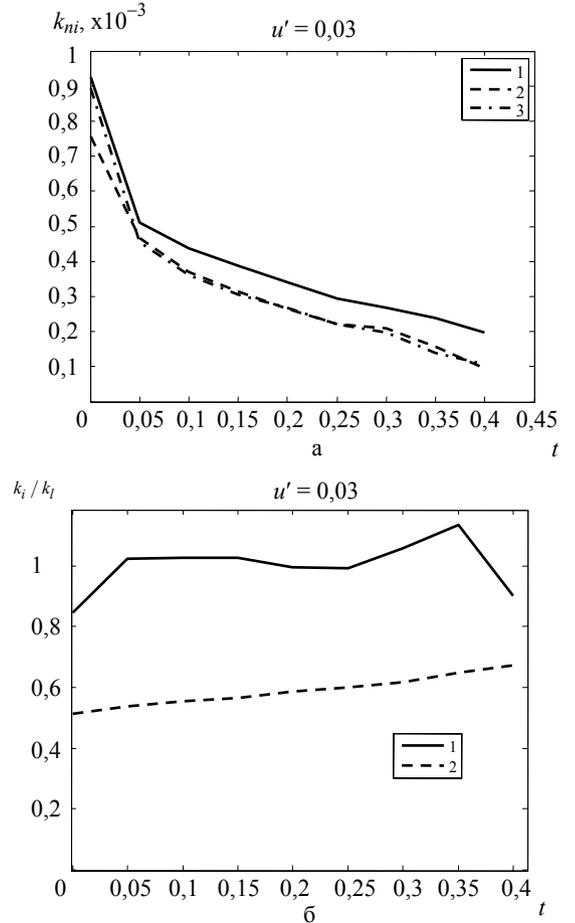


Рис. 9. Зависимость от времени: а – поперечных компонент турбулентной энергии: 3D расчет: 1 – по формуле (37); 2 –  $k_x$  по формуле (47); 3 –  $k_y$  по формуле (47); б – отношения компонент турбулентной энергии в 3D расчете: 1 – отношение поперечных компонент  $k_x/k_y$ ; 2 – отношение радиальной к полной поперечной компоненте  $\langle u_r'^2 \rangle / \langle u_n'^2 \rangle$

Видно, что результаты обработки 3D расчета по формуле (33) для полной поперечной компоненты скорости близки к соответствующим величинам для поперечных компонент, полученным с помощью фурье-анализа. Отметим небольшое отличие отношения радиальной компоненты к полной поперечной компоненте в 3D расчете от теоретического (для изотропной турбулентности) значения 0,5, а также небольшое отличие отношения поперечных компонент в 3D расчете от теоретического (для изотропной турбулентности) значения 1.

На рис. 10 приведена зависимость от времени скорости диссипации, полученной из 3D расчетов одним из описанных в разделе 5.2 способов, а именно, из аппроксимации спектра колмогоровским спектром. Всюду, кроме последнего момента (когда на анализируемую область приходится мало счетных ячеек), согласие с аналитическим решением в целом удовлетворительное. При этом отличие результатов 3D расчета от аналитического решения порядка отличия ( $\approx 20\%$ ) для начальной величины диссипации, задаваемой в решении по  $k$ - $\varepsilon$  модели.

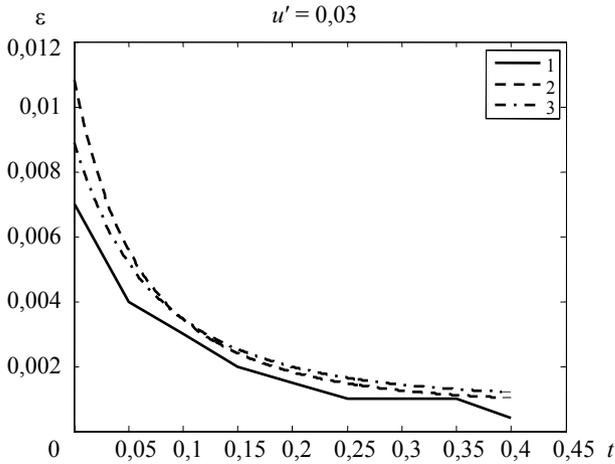


Рис. 10. Зависимость от времени скорости диссипации турбулентной энергии: 1 – 3D расчет;  $k$ - $\varepsilon$  модель: 2 –  $k_0 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 1,1 \cdot 10^{-2}$ ; 3 –  $k_0 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,9 \cdot 10^{-2}$

## 6.2. Амплитуда пульсаций скорости $u' = 0,1$

Результаты фурье-анализа для различных моментов времени аналогичны полученным в разделе 6.1. Зависимости от времени гидродинамических величин также практически не отличаются от предыдущего случая (т. е. совпадают с аналитическим решением), поэтому мы не приводим их.

На рис. 11 приведены зависимости от времени турбулентной энергии. Видно, что результаты 3D расчета близки к аналитическому решению. При этом небольшое отличие результатов 3D расчета, полученных с помощью разных способов обработки, соответствует отличию в 13% для начальной величины турбулентной энергии, задаваемой в решении по  $k$ - $\varepsilon$  модели.

Зависимости от времени отдельных компонент турбулентной энергии, полученных из 3D расчета, приведены на рис. 12. Видно, что результаты обработки 3D

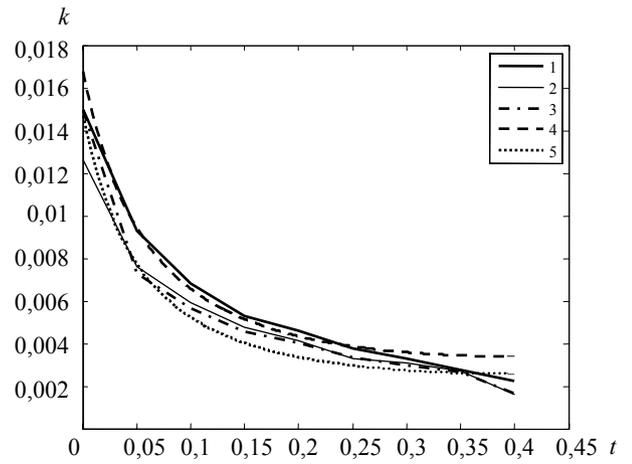


Рис. 11. Зависимость от времени турбулентной энергии. 3D расчет: 1 – по формуле (37); 2 –  $k_x$  по формуле (47); 3 –  $k_y$  по формуле (47);  $k$ - $\varepsilon$  модель: 4 –  $k_0 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,3$ ; 5 –  $k_0 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,3$

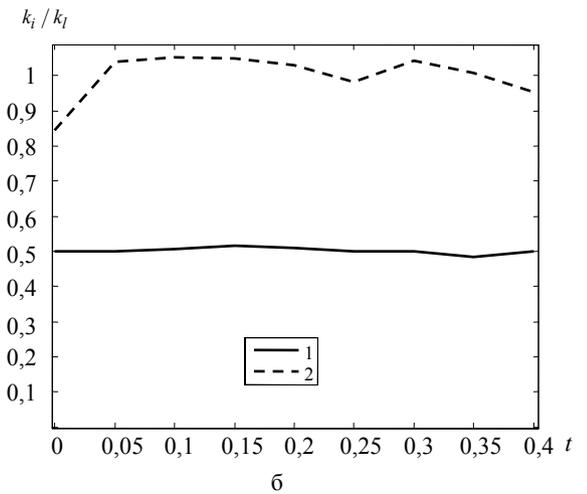
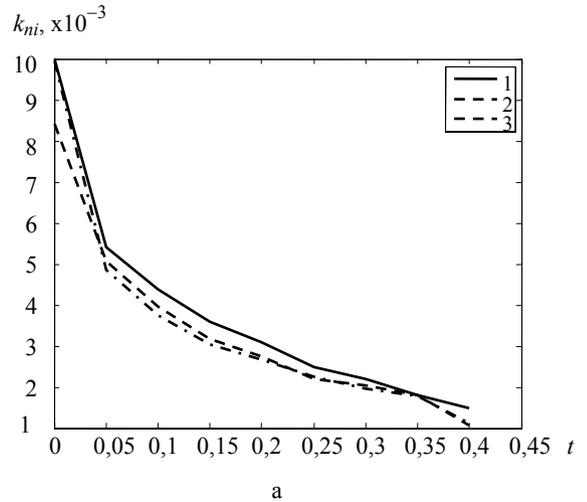


Рис. 12. Зависимость от времени: а – компонент турбулентной энергии в 3D расчете: 1 – по формуле (37); 2 –  $k_{nx}$  по формуле (48); 3 –  $k_{ny}$  по формуле (48); б – отношения компонент турбулентной энергии в 3D расчете: 1 – отношение поперечных компонент  $k_x / k_y$ , 2 – отношение радиальной к полной поперечной компоненте  $\langle u_r'^2 \rangle / \langle u_n'^2 \rangle$

расчета по формуле (33) для полной поперечной компоненты близки к соответствующим величинам для поперечных компонент, полученным с помощью фурье-анализа. Отметим, что в отличие от предыдущего случая с малой начальной амплитудой  $u' = 0,03$  отношение радиальной к полной поперечной компоненте в 3D расчете весьма близко к теоретическому (для изотропной турбулентности) значению 0,5. В то же время имеется небольшое отличие отношения поперечных компонент в 3D расчете от теоретического (для изотропной турбулентности) значения 1.

На рис. 13 приведены зависимости от времени скорости диссипации, полученные из 3D расчетов двумя описанными в разделе 5.2 способами, а именно, из аппроксимации спектра колмогоровским спектром, а также путем осреднения величины (46) по спектру и компонентам. Видно, что согласие в целом удовлетворительное. Отметим также, что всюду, кроме последних моментов времени (когда на анализируемую область приходится мало счетных ячеек), согласие с аналитическим решением в целом удовлетворительное. При этом отличие результатов 3D расчета от аналитического порядка отличия в 15 % для начальных величин турбулентной энергии и диссипации, задаваемой в решении по к-ε модели.

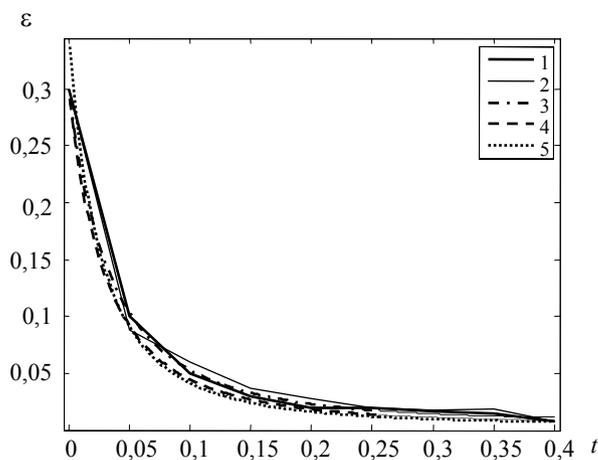


Рис. 13. Зависимость от времени скорости диссипации турбулентной энергии. 3D расчет: 1 – из аппроксимации спектра колмогоровским спектром; 2 – усреднением (46) по спектру и по компонентам; к-ε модель: 3 –  $k_0 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,3$ ; 4 –  $k_0 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,3$ ; 5 –  $k_0 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,35$

### Заклучение

С помощью прямого численного моделирования задачи об однородном сферически-симметричном сжатии турбулизованного газового объема получено решение без эмпирических гипотез. Использованный в работе метод фурье-анализа позволил получить решение не только для турбулентной энергии, но и для скорости ее диссипации. Это решение для различных значений начальной амплитуды случайных пульсаций скорости близко на большей части временного интервала задачи к соответствующему решению, полученному аналити-

чески из уравнений к-ε модели. В зависимости от начальных данных для данной задачи возможны различные режимы поведения турбулентной энергии, в работе рассмотрен вариант с убыванием турбулентной энергии.

Получены численные решения задачи с применением к-ε модели турбулентности. Эти решения для различных начальных значений турбулентной энергии и скорости ее диссипации близки к соответствующим решениям, полученным аналитически из уравнений к-ε модели.

В 3D расчетах влияние начальных данных для турбулентных величин (т. е. отличие начального спектра пульсаций скорости от колмогоровского) быстро забывается. При этом происходит сближение решений, полученных обоими указанными методами.

Все полученные в данной работе аналитические и численные решения близки друг к другу, что говорит об адекватности описания турбулентности в данной задаче как при помощи прямого моделирования, так и с использованием к-ε модели.

В дальнейшем предполагается исследование задачи с начальными условиями, соответствующими режиму развития турбулентности, не содержащему стадии убывания турбулентной энергии.

Авторы признательны В. А. Жмайло за ценные обсуждения.

### Список литературы

1. Statsenko V. P., Velichko O. M., Yanilkin Yu. V., Zharova G. V. Buoyant Jet Formation. Proceedings of the 7<sup>th</sup> Inter. Workshop on the Phys. of Comp. Turbulent Mixing, St.-Peterburg (RUSSIA). 1999. P. 333–338.
2. Шанин А. А., Янилкин Ю. В. Комплекс программ ЭГАК. Газодинамические разностные схемы в эйлеровых переменных // ВАНТ. Сер. ММФП. 1993. Вып. 1.
3. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант к-ε модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // ВАНТ. Сер. ТПФ. 2005. Вып. 3. С. 37–48.
4. Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. Эйлерова методика ТРЭК для расчета трехмерных газодинамических течений многокомпонентной среды // ВАНТ. Сер. ММФП. 1994. Вып. 4. С. 71–78.
5. Бахрах С. М., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // Числ. методы мех. спл. среды. 1983. Т. 14, № 2.
6. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое трехмерное численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // Докл. на Междунар. школе-семинаре «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа». Дубки, 1994.
7. Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Direct Numerical simulation of gravitational turbulent mixing // 5rd Inter. Workshop on the Phys. of comp. turbulent mixing, Stony Brook, USA, 1995.

8. Statsenko V. P., Zhmailo V. A., Stadnik A. A., Yanilkin Yu. V. Direct Numerical Simulation Of Turbulent Mixing In Shear Flows // 5rd Inter. Workshop on the Phys. of compr. turbulent mixing, Stony Brook, USA, 1995.
9. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование гравитационного турбулентного перемешивания // ВАИТ. Сер. ТПФ. 1996. Вып. 1–2. С. 29–37.
10. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // Там же. С. 38–47.
11. Sin'kova O. G., Stadnik A. L., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Three-Dimensional Direct Numerical Simulation of Gravitational Turbulent Mixing // 6<sup>th</sup> Inter. Workshop on the Phys. of comp. turbulent mixing, Marseille. France. 1997. P. 470–479.
12. Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Direct numerical simulation of turbulent mixing in shear flows // Laser and Particle Beams. 1997. Vol. 15, N 1. P. 115–125.
13. Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Rebrov S. V., Sin'kova O. G., Stadnik A. L. Study of gravitational turbulent mixing at large density differences using direct 3D numerical simulation // Report to 8<sup>th</sup> Inter. Seminar on Turbulent Mixing of Compr. Matter. 8<sup>th</sup> IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.
14. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Ребров С. В., Синькова О. Г., Стадник А. Л. Исследование гравитационного турбулентного перемешивания при больших разностях плотностей с помощью прямого трехмерного численного моделирования // ВАИТ. Сер. ММФП. 2002. Вып. 2. С. 3–9.
15. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2.

Статья поступила в редакцию 18.05.2010