УДК 621.039; 519.224.2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТОВ РАЗМЕРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЫБОРОК С ДЕФЕКТАМИ ПРИ УЧЕТЕ И КОНТРОЛЕ ЯДЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. М. Злобин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Россия, г. Саров Нижегородской обл.

При проверке выполнения нормативных требований к системе учета и контроля ЯМ эксплуатирующей организации широко применяются выборочные подтверждающие измерения ЯМ, объем которых должен быть запланирован при подготовке и выполнении контрольных проверок и физических инвентаризаций. В общем случае размеры случайной выборки определяются численными расчетами с использованием компьютерных программ (например, программы SpotCheck). Для расчетов размеров выборок в конкретных зонах баланса ЯМ удобно использовать аналитические аппроксимации. В настоящее время на практике широко применяется известное аналитическое выражение, зависящее от доверительной вероятности P_0 и «недопустимого числа дефектов» D_0. К сожалению, используемая формула справедлива только для бездефектных выборок. Однако при проведении выборочных проверок среди отобранных элементов могут быть обнаружены и дефекты, причем действующие нормативные критерии в этих условиях могут и не нарушаться.

В предлагаемой работе на основании метода оценки гипотез получены две приближенные формулы, позволяющие с помощью калькулятора вычислять размеры случайных выборок, необходимые для подтверждения выполнения нормативных требований, в широком диапазоне размеров систем при наличии одного или двух дефектов в выборке и с достаточно хорошей точностью.

При проведении контрольных проверок и физических инвентаризаций ядерных материалов (ЯМ) необходимо знать объем выборочных подтверждающих измерений для проверки выполнения требований, заданных нормативной документацией в области учета и контроля (УиК) ЯМ [1–6]. Необходимые размеры случайных выборок зависят от нормативных критериев, числа учетных единиц в зонах баланса ядерных материалов (ЗБМ), количества дефектов, обнаруженных в выборке, а также от массы ЯМ в учетных единицах и категории ЯМ (при обнаружении пороговых количеств ЯМ). Кроме того, размеры случайных выборок (СВ) могут зависеть от методики проведения выборочных проверок (ВП), принятой в эксплуатирующей организации и устанавливающей процедуры и порядок выполнения ВП. Последнее связано с тем, что в нормативных статистических критериях [1–5] задаются лишь:

– доверительная вероятность;

– доля от полного числа проверяемых элементов системы, которая должна находиться в надлежащем состоянии с заданной доверительной вероятностью.

Таким образом, объем необходимых выборочных измерений должен определяться для каждой конкретной ЗБМ.

В общем случае размеры СВ получают путем численных расчетов с использованием компьютерных программ, например программы SpotCheck. В настоящее время в зарубежной и отечественной практике широко применяется приближенная формула для вычисления размеров бездефектных выборок в зависимости от нормативно заданной доверительной вероятности P_0 и «недопустимого числа дефектов» D_0 [4, 6, 8–10].

Между тем во многих случаях требуется определять минимально необходимые размеры СВ, в которых могут содержаться дефекты. Такая ситуация может иметь место при выборочной проверке пломб, атрибутивных признаков УЕ, учетной документации и т. д. Как правило, в произведенных выборках может допускаться наличие не более одного или двух дефектов. Такой подход, в частности, применяется во французской национальной системе инспекций (см. сообщение Hugues Vidal на совещании в Объединенном исследовательском центре (JRC) в Испре, 2000 г. [7]).

При проведении в РФЯЦ-ВНИИЭФ выездного учебного курса «Учет и контроль ядерных материалов» с участием специалистов УМЦУК ГНЦ РФ-ФЭИ и РФЯЦ-ВНИИЭФ (Саров, 1–4 июня 2010 г.) была отмечена актуальность разработки аналитических аппроксимаций для вычисления размеров СВ с дефектами, которые давали бы возможность определять необходимые размеры выборок в ЗБМ без использования сложных компьютерных программ. Такие достаточно точные аппроксимации в настоящее время отсутствуют.

Одним из основных критериев корректности аппроксимации должно быть хорошее согласие приближенных результатов расчетов размеров СВ с точными численными расчетами при заданном статистическом критерии во всем реальном диапазоне размеров проверяемой системы для определенного числа дефектов в выборке.

В настоящей работе представлены две приближенные формулы, позволяющие без применения программных средств с использованием только калькулятора вычислить размеры случайной выборки для произвольных систем при наличии одного или двух дефектов, с весьма хорошей точностью. Соответствующие аналитические выражения получены на основе метода оценки гипотез и, таким образом, в соответствии с проведенным ранее анализом [8–10], неявно предполагается, что априорная информация о системе до проведения ВП отсутствует. Именно такой подход, как правило, лежит в основе методологии проведения административных и инспекционных проверок состояния УиК ЯМ в эксплуатирующих организациях Росатома.

1. Метод оценки гипотез и нормативные критерии УиК ЯМ

В целях проверки при выборочном контроле выполнения нормативных требований к учету и контролю ядерных материалов минимально необходимый размер случайной выборки n обычно находят путем решения следующего неравенства [2–4, 10]:

$$\sum_{m=\max\{0;n-N+D_0\}}^{d} w\left(N, D_0, n, m\right) \le 1 - P_0 \ , \tag{1}$$

где P_0 – заданная нормативно вероятность нахождения в надлежащем состоянии определенной доли элементов в системе; N – число элементов в проверяемой системе; d – число дефектных элементов в случайной выборке; $w(N, D, n, d)$ – функция гипергеометрического распределения (ГГР) вероятности:

$$w\left(N, D, n, d\right) = \frac{\begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-D \\ n-d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \ \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} \equiv \frac{N!}{n!\left(N-n\right)!} \ . \tag{2}$$

Величина $w(N, D, n, d)$ представляет собой вероятность нахождения в случайной выборке размером n d дефектных элементов, если выборка производится из системы, содержащей N элементов, среди которых D дефектны.

Неравенство (1) соответствует методу оценки гипотез. Как было показано ранее путем сравнения с байесовским подходом (см. [8–10]), метод оценки гипотез неявно предполагает, что априорная информация о системе до проведения выборочных проверок отсутствует. Неравенство (1) позволяет рассчитать минимально необходимый размер случайной выборки, который дает возможность отвергнуть с заданной вероятностью P_0 нуль-гипотезу о том, что в рассматриваемой системе содержится D_0 или большее число дефектов.

Таким образом, решение неравенства (1) позволяет определить минимальный размер случайной выборки (в которой, вообще говоря, могут присутствовать d дефектов), по результатам которой можно утверждать, что с заданной вероятностью P_0 число дефектных элементов в системе меньше D_0.

В качестве нормативных критериев для определения размеров случайной выборки из заданной совокупности элементов в Федеральных нормах и правилах по УиК ЯМ [1, 11] задаются два параметра: P_0 – доверительная вероятность и β – доля элементов в системе, которые должны находиться в надлежащем состоянии с указанной вероятностью.

Введенный выше параметр D_0 («недопустимое» число дефектов) связан с нормативным параметром β следующим соотношением:

$$D_0 = \left[\left(1-\beta\right)N\right] + 1 \ , \tag{3}$$

где [ ] – означает целую часть числа; N – число элементов в проверяемой системе.

Неравенство (1) в общем случае не имеет аналитического решения и может быть решено только численно методом итераций. Целью настоящей работы является получение приближенных формул для расчета размеров случайных выборок с дефектами, достаточно точных и удобных для практического применения при проверке выполнения нормативных критериев СУиК ЯМ.

Далее мы будем рассматривать три основных нормативных статистических критерия Федеральных правил [1, 11]:

– критерий 1: «При определении объема случайной выборки необходимо исходить из требования подтверждения с доверительной вероятностью, равной 0,95, нахождения в надлежащем состоянии не менее 95 % УИВ[1]» (п. 3.4.2.3 НП-030-05 [1]), т. е. $P_0 = 0{,}95$, $\beta = 0{,}95$;

– критерий 2: «Достоверность представления в системе учета и контроля ядерных материалов в ЗБМ данных об идентификаторах учетных единиц и местоположении учетных единиц должна быть не менее 99 %» (п. 8.3 НП-030-05 [1]), т. е. $P_0 = 0{,}99$, $\beta = 0{,}99$;

– критерий 3: «Достоверность учетных данных об идентификаторах учетных единиц и их местоположении в ЗБМ должна быть такой, чтобы подтверждалась с доверительной вероятностью, равной 0,95, правильность не менее 99 % данных» (п. 8.3 проекта НП-030-XX [11]), т. е. $P_0 = 0{,}95$, $\beta = 0{,}99$.

2. Приближенная формула для бездефектных выборок

В частном случае, когда рассматриваются только бездефектные выборки ($d = 0$), неравенство (1) существенно упрощается и принимает вид:

$$w\left(N, D_0, n_0, 0\right) \le 1 - P_0 . \qquad (4)$$

Из этого неравенства легко получить хорошо известное приближенное аналитическое выражение для определения минимально необходимого размера n_0 бездефектной выборки [4, 6, 10]:

$$n_0\left(N, P_0, D_0\right) \ge \left\{ 1 - \left(1 - P_0\right)^{\frac{1}{D_0}} \right\} N . \qquad (5)$$

Указанное приближение справедливо, если система достаточно велика, а число дефектных элементов в системе относительно мало:

$$N \gg 1, \quad D_0 . \qquad (6)$$

Полезно отметить, что в формуле (5) ограничений на размер случайной выборки n_0 нет, кроме естественного условия: $0 \le n_0 \le N$.

В частном случае, полагая $D_0 = 1$, из неравенства (5) получим простую, физически ясную формулу для размера бездефектной выборки, необходимого для подтверждения с вероятностью P_0 полного отсутствия дефектов в системе:

$$n_0 \ge P_0 N . \qquad (7)$$

Поскольку нормативно заданное значение вероятности P_0 близко к единице [1], то требуемый размер такой случайной выборки оказывается сравнимым с объемом генеральной совокупности N.

В практической деятельности в области УиК ЯМ условия (6) обычно хорошо выполняются. Тем не менее поскольку современные нормативные критерии в УиК ЯМ в принципе допускают наличие в системе дефектов (не выше определенного количества), то надо не забывать, что формула (5) не применима, если в произведенной выборке обнаружен хотя бы один дефект.

Кроме того, следует отметить, что при проверке нормативного критерия для обнаружения пороговых количеств ЯМ [1] неравенство (6) может нарушаться, если в учетных единицах (контейнерах) находятся ядерные материалы, масса которых много меньше пороговой:

$$\frac{G}{m} \sim N \gg 1 , \qquad (8)$$

где m – средняя масса ядерного материала в учетной единице; G – пороговое (целевое) количество ядерного материала данной категории.

Если неравенство $D_0 \ll N$ нарушается, то в этом случае необходимо численно решать неравенство (1), либо использовать байесовский подход [8–10], а также другие приближенные методы.

3. Аналитическая аппроксимация для выборок с одним дефектом

В практических целях в УиК ЯМ, как указывалось выше, довольно часто возникает необходимость проверки выполнения нормативных критериев с использованием случайных выборок, в которых могут допускаться дефект-

[1] УИВ – устройства индикации вмешательства (пломбы).

ные элементы. Это имеет место при проверке УИВ, достоверности представления в системе учета и контроля ядерных материалов в ЗБМ данных об идентификаторах учетных единиц и местоположении УЕ и др. [1]. Получим аналитическую аппроксимацию решения неравенства (1) для случая, когда в выборке возможно появление одного дефекта.

Итак, полагаем в неравенстве (1) $d = 1$. В этом случае в левой части неравенства (1) остаются два слагаемых:

$$w(N, D_0, n, 0) + w(N, D_0, n, 1) \le 1 - P_0 . \tag{9}$$

Используя выражение (2) для ГГР и свойства сочетаний, преобразуем левую часть (9) к явному алгебраическому виду:

$$w(N, D_0, n, 0) + w(N, D_0, n, 1) = \frac{\binom{D_0}{0}\binom{N-D_0}{n}}{\binom{N}{n}} + \frac{\binom{D_0}{1}\binom{N-D_0}{n-1}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{(N-D_0)!(N-n)!n!}{(N-D_0-n)!n!N!} + \frac{D_0(N-D_0)!(N-n)!n!}{(N-D_0-n+1)!(n-1)!N!} = \frac{(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-D_0+1)}{N(N-1)\ldots(N-D_0+1)} +$$

$$+ \frac{D_0 n(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-D_0+2)}{N(N-1)\ldots(N-D_0+1)} = \left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{N-D_0+1}\right) +$$

$$+ \frac{D_0 n}{N-D_0+1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{N-D_0+2}\right) \approx \left(1-\frac{n}{N}\right)^{D_0} + \frac{D_0 n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)^{D_0-1} . \tag{10}$$

На последнем этапе преобразований мы предположили, что система достаточно велика, а дефектных элементов мало, т. е. выполняется неравенство (6): это основной практически важный случай в УиК ЯМ.

В указанном приближении неравенство (9) с использованием преобразования (10) примет вид:

$$\left(1-\frac{n_1}{N}\right)^{D_0} + \frac{D_0 n_1}{N}\left(1-\frac{n_1}{N}\right)^{D_0-1} \le 1 - P_0 . \tag{11}$$

Здесь в обозначении размера случайной выборки n_1 введен индекс «1» для указания того, что рассматриваемая выборка содержит один дефект.

Если рассматриваются только бездефектные выборки, то в формуле (11) второе слагаемое в левой части исчезает, и из (11) непосредственно следует приближенная формула (5).

Простым преобразованием выражение (11) можно привести к более удобному для наших целей виду:

$$\left(1-\frac{n_1}{N}\right)^{D_0-1} \le \frac{1-P_0}{1+\frac{(D_0-1)n_1}{N}} \tag{12}$$

или

$$n_1 \ge \left\{1-\left(\frac{1-P_0}{1+\frac{(D_0-1)n_1}{N}}\right)^{\frac{1}{D_0-1}}\right\} N . \tag{13}$$

Полученное неравенство обобщает формулу (5) на случай выборок с одним дефектом. К сожалению, структура этого выражения достаточно сложна, и в общем случае для произвольных D_0 неравенство (13) можно решить лишь численно методом итераций.

Чтобы получить более простое и удобное для практических целей приближение, запишем формулу (13) в следующем виде:

$$n_1 \ge \left\{1-\left(\frac{1-P_0}{1+\frac{\alpha(D_0-1)n_0(N, P_0, D_0)}{N}}\right)^{\frac{1}{D_0-1}}\right\} N , \tag{14}$$

где $n_0(N, P_0, D_0)$ – минимально необходимый размер бездефектной выборки, необходимый для подтверждения с доверительной вероятностью P_0, что число дефектов в системе менее D_0; α – феноменологический численный коэффициент, учитывающий, что произведенная при переходе от (13) к (14) замена $n_1 \to n_0$ в правой части формулы несколько уменьшает величину дроби, стоящей в знаменателе. Поэтому должно выполняться неравенство: $\alpha > 1$. Этот параметр выбирается на основании тестовых расчетов.

Стоящая в формуле (14) величина $n_0(N, P_0, D_0)$ может быть вычислена по приближенной формуле (5). Подставляя (5) в (14), получим окончательное выражение для размера выборки n_1:

$$n_1 \geq \left\{1 - \left(\frac{1-P_0}{1+\alpha(D_0-1)\left(1-(1-P_0)^{\frac{1}{D_0}}\right)}\right)^{\frac{1}{D_0-1}}\right\} N. \tag{15}$$

Здесь надо считать, что $D_0 > 1$, поскольку в рассматриваемом случае случайная выборка содержит один дефект, и поэтому $D_0 > d = 1$.

Итак, формула (15) дает приближенное аналитическое выражение для определения минимального размера случайной выборки, необходимой для подтверждения с вероятностью P_0, что число дефектов в системе менее D_0, если в выборке обнаружен один дефект. Эта формула обобщает широко известное выражение (5) на случай обнаружения в СВ одного дефекта.

Таким образом, с помощью аналитических выражений (5) и (14) или (15) можно вычислить минимально необходимые размеры случайных выборок (без дефектов или с одним дефектом) для проверки выполнения нормативных требований, не прибегая к компьютерным программам.

Феноменологический численный коэффициент α в формулах (14) и (15) может быть выбран на основании тестовых расчетов (например, с использованием программы SpotCheck). Если выражения (14) и (15) правильно описывают зависимость размера выборок от параметров задачи N, P_0, D_0, то они должны обеспечивать хорошее согласие с точным численным расчетом в широком диапазоне размеров системы для различных нормативных критериев.

4. Аналитическая аппроксимация для выборок с двумя дефектами

Будем считать, что в неравенстве (1) $d = 2$. В этом случае в левой части его необходимо рассмотреть три слагаемых:

$$w(N, D_0, n, 0) + w(N, D_0, n, 1) + w(N, D_0, n, 2) \leq 1 - P_0. \tag{16}$$

Используя выражение (2) для ГГР и свойства сочетаний, преобразуем левую часть (16) к явному алгебраическому виду:

$$w(N, D_0, n, 0) + w(N, D_0, n, 1) + w(N, D_0, n, 2) =$$

$$= \frac{\binom{D_0}{0}\binom{N-D_0}{n}}{\binom{N}{n}} + \frac{\binom{D_0}{1}\binom{N-D_0}{n-1}}{\binom{N}{n}} + \frac{\binom{D_0}{2}\binom{N-D_0}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\frac{(N-D_0)!}{(N-D_0-n)!\,n!} + \frac{D_0(N-D_0)!}{(N-D_0-n+1)!(n-1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{D_0!(N-D_0)!}{2!(D_0-2)!(N-D_0-n+2)!(n-2)!}\right] = \frac{(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-D_0+1)}{N(N-1)\ldots(N-D_0+1)} +$$

$$+ \frac{D_0 n(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-D_0+2)}{N(N-1)\ldots(N-D_0+1)} + \frac{D_0(D_0-1)n(n-1)(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-D_0+3)}{2N(N-1)\ldots(N-D_0+1)} =$$

$$= \left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{N-D_0+1}\right) + \frac{D_0 n}{N-D_0+1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{N-D_0+2}\right) +$$

$$+ \frac{n(n-1)D_0(D_0-1)}{2(N-D_0+1)(N-D_0+2)}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{N-D_0+3}\right). \tag{17}$$

Считая условия (6) выполненными и подставляя выражение (17) в неравенство (16), преобразуем последнее к виду:

$$\left(1-\frac{n_2}{N}\right)^{D_0}+\frac{D_0 n_2}{N-D_0+1}\left(1-\frac{n_2}{N}\right)^{D_0-1}+\frac{D_0\left(D_0-1\right)n_2\left(n_2-1\right)}{2\left(N-D_0+1\right)\left(N-D_0+2\right)}\left(1-\frac{n_2}{N}\right)^{D_0-2}\le 1-P_0 . \tag{18}$$

Здесь в обозначении размера случайной выборки n_2 введен индекс «2», чтобы подчеркнуть, что рассматриваемая выборка может содержать два дефекта.

Из (18) с учетом (6) непосредственно следует приближенная формула:

$$\left(1-\frac{n_2}{N}\right)^{D_0-2}\le\frac{1-P_0}{\left(1-\frac{n_2}{N}\right)\left(1+\frac{\left(D_0-1\right)n_2}{N}\right)+\frac{D_0\left(D_0-1\right)n_2\left(n_2-1\right)}{2N^2}} \tag{19}$$

или

$$n_2\ge\left\{1-\left(\frac{1-P_0}{\left(1-\frac{n_2}{N}\right)\left(1+\frac{\left(D_0-1\right)n_2}{N}\right)+\frac{D_0\left(D_0-1\right)n_2\left(n_2-1\right)}{2N^2}}\right)^{\frac{1}{D_0-2}}\right\}N . \tag{20}$$

Полученное неравенство обобщает формулу (13) на случай выборок с двумя дефектами. К сожалению, в общем случае для произвольных D_0 это неравенство можно решить лишь численно методом итераций.

Чтобы получить более простое и удобное для практических целей аналитическое выражение, запишем формулу (20) в следующем виде:

$$n_2\ge\left\{1-\left(\frac{1-P_0}{\left(1-\frac{\gamma n_1}{N}\right)\left(1+\frac{\gamma\left(D_0-1\right)n_1}{N}\right)+\frac{\gamma D_0\left(D_0-1\right)n_1\left(n_1-1\right)}{2N^2}}\right)^{\frac{1}{D_0-2}}\right\}N , \tag{21}$$

где $n_1\left(N,P_0,D_0\right)$ – минимально необходимый размер случайной выборки с одним дефектом при «недопустимом числе дефектов» D_0, вычисляемый с помощью приближенных формул (14) или (15); γ – феноменологический численный коэффициент, учитывающий, что произведенная при переходе от (20) к (21) замена $n_2\to n_1$ в правой части формулы несколько уменьшает величину знаменателя. Поэтому должно выполняться неравенство: $\gamma > 1$. Этот параметр, как и параметр α, выбирается на основании тестовых расчетов (например, с помощью программы SpotCheck).

Таким образом, с помощью аналитической аппроксимации (21) и с использованием формулы (14) или (15) можно вычислить минимально необходимые размеры случайных выборок с двумя дефектами для проверки выполнения нормативных требований без использования численных расчетов с применением компьютерных программ.

5. Сравнение результатов расчетов

5.1. Аналитическая аппроксимация для выборки с одним дефектом

В табл. 1–3 представлены результаты сравнения расчетов размеров случайных выборок (с числом дефектов d = 0, 1) с использованием аналитических аппроксимаций (5), (14) и численных расчетов с помощью компьютерной программы SpotCheck. Сравнение проведено при широкой вариации размера системы для двух значений параметра α и трех основных нормативных статистических критериев Федеральных правил УиК ЯМ, рассмотренных в разделе 1.

В табл. 1 представлено сравнение точных и приближенных значений размеров выборок с использованием формул (5) и (14) для критерия 1 и двух значений параметра α: α = 1,37 и α = 1,4.

Из табл. 1 следует, что для бездефектных выборок и критерия 1 расчеты по приближенной формуле (5) дают размеры СВ, отличающиеся от точных численных расчетов не более чем на 1.

Полученная в отчете аналитическая аппроксимация (14) для выборок с одним дефектом при рассмотренных значениях феноменологического параметра α дает столь же хорошее согласие с точными расчетами: отличие размеров выборок от точных расчетов не превосходит 1 в широком диапазоне размеров системы. При этом для критерия 1 значение параметра $\alpha = 1{,}4$ более предпочтительно (особенно для больших систем с $N \geq 5000$).

Таблица 1

Минимальные размеры случайной выборки *n*, необходимые для подтверждения требования о нахождении в надлежащем состоянии не менее 95 % УИВ с доверительной вероятностью, равной 0,95 (критерий 1). Число дефектов в выборке не более одного. Сравнение численных расчетов с аналитической аппроксимацией

N	Размер случайной выборки n в зависимости от числа дефектов d в выборке				
	n_0 (d = 0)		n_1 (d = 1)		n_1 (d = 1)
	Численные расчеты[1]	Аппроксимация[2]	Численные расчеты	Аппроксимация (α = 1,37)[3]	Аппроксимация (α = 1,4)
100	39	39	58	58	58
300	50	51	78	78	78
500	54	54	84	83	83
1000	56	57	88	88	88
5000	58	59	92	91	92
10000	59	60	93	92	93

Таблица 2

Минимальные размеры случайной выборки *n*, необходимые для подтверждения требования о нахождении в надлежащем состоянии не менее 99 % УИВ с доверительной вероятностью, равной 0,99 (критерий 2). Число дефектов в выборке не более одного. Сравнение численных расчетов с аналитической аппроксимацией

N	Размер случайной выборки n в зависимости от числа дефектов d в выборке				
	n_0 (d = 0)		n_1 (d = 1)		n_1 (d = 1)
	Численные расчеты	Аппроксимация	Численные расчеты	Аппроксимация (α = 1,37)	Аппроксимация (α = 1,4)
100	90	90	100	100	100
300	205	205	257	259	259
500	267	268	352	354	354
1000	341	342	468	470	471
5000	430	432	614	613	615
10000	444	446	637	636	637

В табл. 2 приведены результаты аналогичных расчетов размеров СВ с помощью приближенной формулы (14) для критерия 2 и двух значений параметра α.

Отметим, что расчеты для бездефектных выборок для критерия 2 по приближенной формуле (5) дают размеры выборок, отличающиеся от численных расчетов не более чем на 2: приближенные результаты несколько ухудшаются с ростом N.

Аналитическая аппроксимация (14) для выборок с одним дефектом и критерия 2 при рассмотренных двух значениях коэффициента α (1,37 и 1,4) дает хорошее согласие с численными расчетами во всем рассмотренном диапазоне размеров системы. Для последующих приближенных расчетов размеров выборок с двумя дефектами примем $\alpha = 1{,}37$.

В табл. 3 представлено сравнение точных и приближенных значений размеров выборок с использованием формул (5) и (14) для критерия 3 и двух значений параметра $\alpha = 1{,}5$ и $\alpha = 1{,}53$.

[1] Результаты численных расчетов, приведенные в табл. 1–6, получены с помощью компьютерной программы SpotCheck по методу оценки гипотез.

[2] Расчеты по приближенной формуле (5).

[3] Расчеты, приведенные в двух последних столбцах, получены по приближенной формуле (14).

Таблица 3

Минимальные размеры случайной выборки n, необходимые для подтверждения требования о нахождении в надлежащем состоянии не менее 99 % УИВ с доверительной вероятностью, равной 0,95 (критерий 3). Число дефектов в выборке не более одного. Сравнение численных расчетов с аналитической аппроксимацией

N	Размер случайной выборки n в зависимости от числа дефектов d в выборке				
	n_0 (d = 0)		n_1 (d = 1)		n_1 (d = 1)
	Численные расчеты	Аппроксимация	Численные расчеты	Аппроксимация (α = 1,5)	Аппроксимация (α = 1,53)
100	78	78	98	98	98
300	158	158	225	226	227
500	196	196	290	291	292
1000	238	238	364	363	364
5000	284	285	447	445	446
10000	291	292	460	457	459

Из табл. 3 следует, что для бездефектных выборок и критерия 3 расчеты по приближенной формуле (5) дают размеры выборок, отличающиеся от численных расчетов не более чем на 1.

Аналитическая аппроксимация (14) при критерии 3 для выборок с одним дефектом дает хорошее согласие с точными расчетами для обоих рассмотренных значений параметра α. Для не слишком больших систем (N < 1000) лучшие результаты дает значение коэффициента α = 1,5: размеры выборок отличаются от точных не более чем на 1.

Для больших систем (N > 1000) лучшие результаты дает значение коэффициента α = 1,53. Это значение α для критерия 3 и широкого диапазона изменения числа элементов N можно считать предпочтительным.

Таким образом, по аналитической аппроксимации (14) для выборок с одним дефектом и рассмотренных нормативных критериев СУиК ЯМ можно сделать следующие выводы:

– для критерия 1 наилучшее согласие с точными расчетами имеет место при коэффициенте α = 1,4;

– для критерия 2 наилучшее согласие с точными расчетами имеется при коэффициенте α = 1,37;

– для критерия 3 наилучшее согласие имеет место при коэффициенте α = 1,53.

Размеры выборок $n_1\left(N, P_0, D_0\right)$, соответствующие указанным значениям параметра α для трех нормативных критериев, будут использованы в приближенных расчетах необходимых размеров случайных выборок с двумя дефектами по формуле (21). Напомним, что приближенные значения $n_1\left(N, P_0, D_0\right)$, приведенные в табл. 1–3, получены с использованием приближенных значений $n_0\left(N, P_0, D_0\right)$, вычисленных по формуле (5). Таким образом, нахождение приближенных размеров случайных выборок $n_1\left(N, P_0, D_0\right)$ и $n_2\left(N, P_0, D_0\right)$ производится без применения компьютерных программ.

5.2. Аналитическая аппроксимация для выборки с двумя дефектами

В табл. 4 представлено сравнение точных и приближенных значений размеров выборок с двумя дефектами с использованием формул (14) и (21) для критерия 1.

Представлены расчеты для трех значений феноменологического параметра γ, определяющего размер выборки n_2, в диапазоне 1,5–1,6. Размер выборки n_2 зависит в соответствии с (14) и (21) от параметра α, вариация которого рассматривалась в п. 5.1, по результатам которого было выбрано значение α = 1,4 (см. табл. 1).

Из данных табл. 4 следует, что для критерия 1 приближенная формула (21) для размера выборки n_2 может обеспечить очень хорошее согласие с точными расчетами в рассмотренном диапазоне γ для всех размеров системы. Это объясняется относительной мягкостью критерия 1. Как следует из представленных расчетов, наилучшее согласие для этого критерия достигается при значении феноменологического параметра γ = 1,54.

В табл. 5 представлено сравнение точных и приближенных значений размеров выборок с использованием формул (14) и (21) для критерия 2 и трех значений параметра γ в диапазоне ≈1,5–1,6. Для приближенных расчетов $n_2\left(N, P_0, D_0\right)$, на основании данных табл. 2, принято значение феноменологического параметра α = 1,37.

Из табл. 5 следует, что для критерия 2 при значении параметра α = 1,37 приближенная формула (21) для размера выборки n_2 дает очень хорошее согласие с точными расчетами при $\gamma \approx$ 1,48–1,5 в широком диапазоне размеров системы. Практически идеальное согласие имеет место при значении γ = 1,5.

В табл. 6 представлено сравнение точных и приближенных значений размеров выборок с использованием формул (14) и (21) для критерия 3 и трех значений параметра γ: γ = 1,6; 1,7; 1,8. Расчеты основывались на наиболее оптимальном для этого критерия значении параметра α = 1,53 (см. табл. 3).

Т а б л и ц а 4

Минимальные размеры случайной выборки n_2 с двумя дефектами, необходимые для подтверждения требования о нахождении в надлежащем состоянии не менее 95 % элементов с доверительной вероятностью, равной 0,95 (критерий 1). Сравнение аналитической аппроксимации с численными расчетами

N	Размер случайной выборки n в зависимости от числа дефектов d в выборке				
	n_1 (d = 1)	n_2 (d = 2)			
	Аппроксимация (α = 1,4)[1]	Численные расчеты[2]	Аппроксимация (γ = 1,5)	Аппроксимация (γ = 1,54)	Аппроксимация (γ = 1,6)
100	58	73	72	72	72
300	78	102	102	102	102
500	83	110	109	110	110
1000	88	117	116	117	117
5000	92	123	122	123	123
10000	93	123	123	123	124

Т а б л и ц а 5

Минимальные размеры случайной выборки n_2 с двумя дефектами, необходимые для подтверждения требования о нахождении в надлежащем состоянии не менее 99 % элементов с доверительной вероятностью, равной 0,99 (критерий 2). Сравнение аналитической аппроксимации с численными расчетами

N	Размер случайной выборки n в зависимости от числа дефектов d в выборке				
	n_1 (d = 1)	n_2 (d = 2)			
	Аппроксимация (α = 1,37)[3]	Численные расчеты	Аппроксимация (γ = 1,48)	Аппроксимация (γ = 1,5)	Аппроксимация (γ = 1,6)
100	100	–	–	–	–
300	259	287	287	287	287
500	354	413	413	413	413
1000	470	571	571	572	574
5000	613	772	771	772	777
10000	636	804	803	804	810

Т а б л и ц а 6

Минимальные размеры случайной выборки n_2 с двумя дефектами, необходимые для подтверждения требования о нахождении в надлежащем состоянии не менее 99 % элементов с доверительной вероятностью, равной 0,95 (критерий 3). Сравнение аналитической аппроксимации с численными расчетами

N	Размер случайной выборки n в зависимости от числа дефектов d в выборке				
	n_1 (d = 1)	n_2 (d = 2)			
	Аппроксимация (α = 1,53)[4]	Численные расчеты	Аппроксимация (γ = 1,6)	Аппроксимация (γ = 1,63)	Аппроксимация (γ = 1,65)
100	98	–	–	–	–
300	227	271	268	268	268
500	292	364	362	362	362
1000	364	469	467	468	469
5000	446	589	589	590	591
10000	459	608	607	609	610

Из данных, представленных в табл. 6, следует, что для критерия 3 при рассмотренных значениях параметра γ приближенная формула (21) для размера выборки n_2 дает хорошее согласие с точными расчетами в широком диа

[1] Результаты приближенных расчетов $n_1(N, P_0, D_0)$ взяты из табл. 1.

[2] Численные расчеты размеров случайных выборок с двумя дефектами, представленные в табл. 4–6, выполнены с помощью компьютерной программы SpotCheck по методу оценки гипотез.

[3] Результаты приближенных расчетов $n_1(N, P_0, D_0)$ взяты из табл. 2.

[4] Результаты приближенных расчетов $n_1(N, P_0, D_0)$ взяты из табл. 3.

пазоне размеров системы. Наилучшее согласие достигается при $\gamma = 1{,}63$, особенно для больших систем ($N > 1000$), где приближенные значения размеров случайных выборок с двумя дефектами отличаются от точных значений не более чем на 1.

На рис. 1–3 представлены зависимости размеров случайных выборок от числа элементов в системе, полученные с помощью численных расчетов по программе SpotCheck, для трех нормативных критериев УиК ЯМ. Маркеры указывают значения размеров случайных выборок, необходимые для подтверждения указанных критериев, полученные с помощью предложенных в работе приближенных формул (соответствующие значения $n_0(N, P_0, D_0)$, $n_1(N, P_0, D_0)$, $n_2(N, P_0, D_0)$ приведены в табл. 1–6).

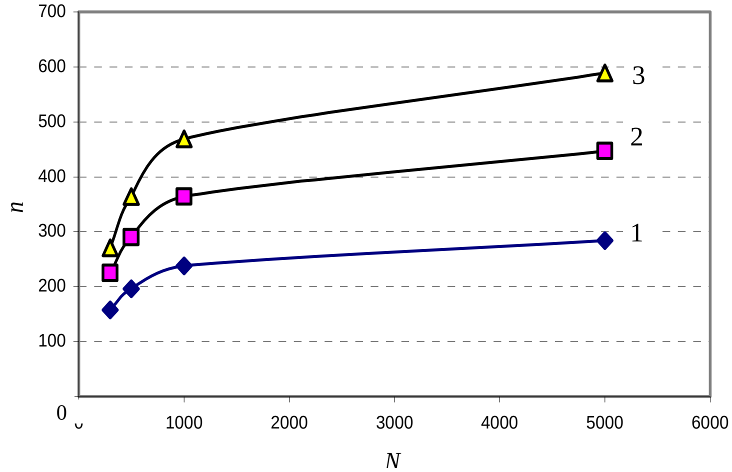

Рис. 1. Зависимость размеров выборок, необходимых для подтверждения нормативного критерия 1, от числа элементов в системе: 1 – $n_0(N, P_0, D_0)$ – бездефектные выборки; 2 – $n_1(N, P_0, D_0)$ – выборки с одним дефектом; 3 – $n_2(N, P_0, D_0)$ – выборки с двумя дефектами

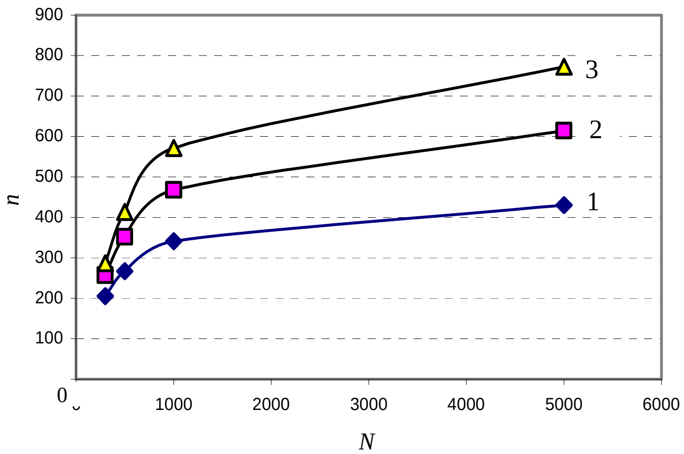

Рис. 2. Зависимость размеров выборок, необходимых для подтверждения нормативного критерия 2, от числа элементов в системе: 1 – $n_0(N, P_0, D_0)$ – бездефектные выборки; 2 – $n_1(N, P_0, D_0)$ – выборки с одним дефектом; 3 – $n_2(N, P_0, D_0)$ – выборки с двумя дефектами

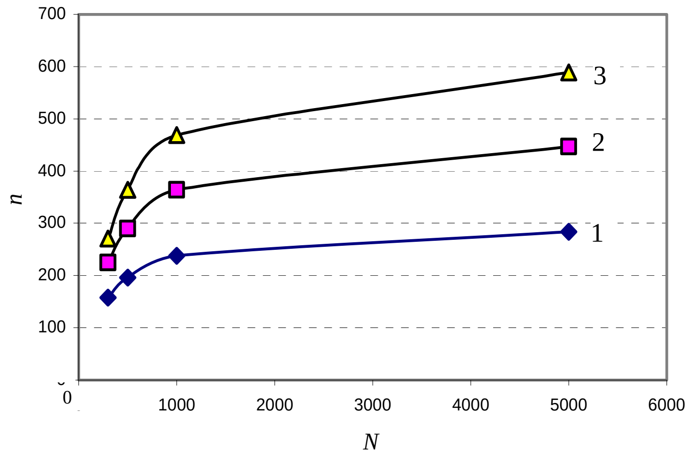

Рис. 3. Зависимость размеров выборок, необходимых для подтверждения нормативного критерия 3, от числа элементов в системе: 1 – $n_0(N, P_0, D_0)$ – бездефектные выборки; 2 – $n_1(N, P_0, D_0)$ – выборки с одним дефектом; 3 – $n_2(N, P_0, D_0)$ – выборки с двумя дефектами

5.3. Выводы

В работе предложены аналитические аппроксимации для определения минимально необходимых размеров случайных выборок с дефектами при проверке выполнения нормативных критериев СУиК ЯМ.

Приближенные формулы для определения размеров случайных выборок, содержащих один дефект и два дефекта, имеют вид (15) и (21) соответственно. Они содержат два феноменологических параметра α и γ, зависящие от нормативного критерия и практически не зависящие от размеров системы.

Рекомендуемые значения феноменологических параметров α и γ, необходимые для приближенных расчетов размеров случайных выборок с дефектами $n_1(N, P_0, D_0)$ и $n_2(N, P_0, D_0)$ для трех нормативных критериев СУиК ЯМ, полученные в результате тестовых расчетов, приведены в табл. 7.

Таблица 7

Значения основных параметров для трех нормативных критериев СУиК ЯМ, необходимые для расчетов размеров случайных выборок с помощью приближенных формул (5), (14), (21)

Параметр	Критерий 1	Критерий 2	Критерий 3
P_0	0,95	0,99	0,95
β	0,95	0,99	0,99
α	1,4	1,37	1,53
γ	1,54	1,5	1,63

Заключение

В работе представлены две приближенные формулы, позволяющие без применения программных средств с использованием только калькулятора рассчитать с достаточно хорошей точностью для произвольных систем необходимые для проверки нормативных критериев размеры случайных выборок, содержащих один или два дефекта.

Процедура вычисления необходимого размера $n_2(N, n_0, P_0, D_0)$ случайной выборки, содержащей два дефекта, состоит в том, что сначала вычисляется с помощью известного аналитического выражения необходимый для проверки заданного нормативного критерия размер бездефектной выборки $n_0(N, P_0, D_0)$. Здесь N – число элементов в проверяемой системе, параметры: P_0 – доверительная вероятность и D_0 – «недопустимое число дефектов», определяемое нормативным критерием.

Далее с использованием полученной в настоящем отчете приближенной формулы вычисляется необходимый для проверки заданного критерия размер случайной выборки с одним дефектом $n_1(N, n_0, P_0, D_0)$.

Размер выборки $n_2(N, n_0, P_0, D_0)$, содержащей два дефекта, определяется с помощью другой приближенной формулы с использованием вычисленной величины $n_1(N, n_0, P_0, D_0)$.

Таким образом, на всех этапах расчеты производятся с достаточно простыми выражениями, содержащими нормативно заданные величины, а также два феноменологических параметра α и γ. Применение рекомендуемых значений указанных параметров обеспечивает в большинстве случаев очень хорошее согласие с точными расчетами.

Список литературы

1. Основные правила учета и контроля ядерных материалов (НП-030-05). Утверждены постановлением Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 26 декабря 2005 г. № 19. Введены в действие с 1 мая 2006 г.
2. Guide to the Evaluation of Selected Materials Control and Accountability (MC&.A) Detection Elements. Issued by the Security Office of Security Affaits Office of Nonproliferation and National Security of Energy. May, 1994.
3. International Atomic Energy Agency (IAEA) SAFEGUARDS. Statistical Concepts and Techniques. Vienna,1989.
4. Jaech J. L. Statistical Methods in Nuclear Material Control. TID-26298. U.S. Gov't Printing Office. 1973.
5. ОСТ 95 10560-2001. Система государственного учета и контроля ядерных материалов. Физическая инвентаризация ядерных материалов.
6. Dennis R. Weier. Обзор применения статистики в системах учета, контроля и физической защиты. ТСЗНЛ США. Курс министерства энергетики США в российском учебно-методическом центре «Статистические методы для расчета инвентаризационной разницы». Обнинск, Россия, декабрь, 1997 г.
7. Hugues Vidal. French National Safeguards. National Control Inspection and Analysis. IPSN/DSMR – France. Ispra, September, 2000.
8. Горбатенко М. В., Злобин А. М., Юферев В. И. Сравнение метода статистических гипотез и Байесовского подхода при выборочных проверках систем // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2004. Вып. 1–2. С. 70–81.
9. Gorbatenko M. V., Zlobin A. M., Yuferev V. I. Bayes Approach to System Random Inspections for Nuclear Material Control & Accounting» // Journal of Nuclear Materials Management. Winter 2006. Vol. 34, N 2. P. 4–9.
10. Горбатенко М. В., Злобин А. М., Сафронов И. И., Юферев В. И. Выборочные проверки и методы их использования для учета и контроля ядерных материалов. Саров, 2008.
11. Основные правила учета и контроля ядерных материалов. НП-030-ХХ. Проект федеральных норм и правил в области использования атомной энергии. «Ядерная и радиационная безопасность». 2010, № 1(55).

Статья поступила в редакцию 02.08.2010.