УДК 531.51

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

М. В. Горбатенко, Т. М. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Россия, г. Саров Нижегородской обл.

Анализируются известные из литературы пять трактовок принципа эквивалентности в общей теории относительности на предмет их согласованности с уравнениями общей теории относительности. Оказывается, что согласованность имеет место по отношению ко всем трактовкам, за исключением той из них, в которой траектория спиновой пробной частицы отождествляется с геодезической. Зависимость траектории движения пробной частицы от наличия спина и тем самым от внутренней структуры частицы может изменить существующие представления о характере движения пробных частиц вблизи сингулярностей гравитационного поля.

Введение

При создании общей теории относительности (ОТО) как сам Эйнштейн (см., например, [1]), так и специалисты-гравитационисты часто прибегали к так называемому принципу эквивалентности (ПЭ). Упоминания о ПЭ не исчезают и со страниц современной литературы. Возникает вопрос: Чем объяснить такую живучесть ПЭ? Или: Что дает ПЭ для ОТО? Такого типа вопросы возникают еще и потому, что ОТО представляет собой самодостаточную строгую математическую теорию. При задании начальных и граничных условий, а также уравнений состояния материи эволюция гравитационного поля идет однозначно (во всяком случае, в некоторой окрестности вблизи от начальной гиперповерхности). Идет однозначно независимо от того, существует или не существует ПЭ. Так зачем в таком случае вообще нужен ПЭ?

Прежде чем искать ответы на сформулированные выше вопросы, нам представляется целесообразным привести сначала существующие трактовки ПЭ. Это тем более целесообразно, что зачастую под ПЭ разные люди понимают далеко не одно и то же.

1. Трактовки ПЭ

Трактовка 1. Будем ее называть лифтом Эйнштейна.

Под «лифтом Эйнштейна» имеется в виду лаборатория, помещенная в закрытой кабине лифта, в двух совершенно различных ситуациях. В первом случае кабина лифта подвешена неподвижно в гравитационном поле Земли и наблюдатель, присутствующий в ней, видит, что предметы падают с привычным ускорением свободного падения. Во втором случае кабина лифта находится в космосе, далеко от каких-либо масс, но при этом ракетный двигатель сообщает ей ускорение, в точности равное ускорению свободного падения, и наблюдатель этого не ощущает. Пояснения к эксперименту под названием «лифт Эйнштейна» приведены на рис. 1.

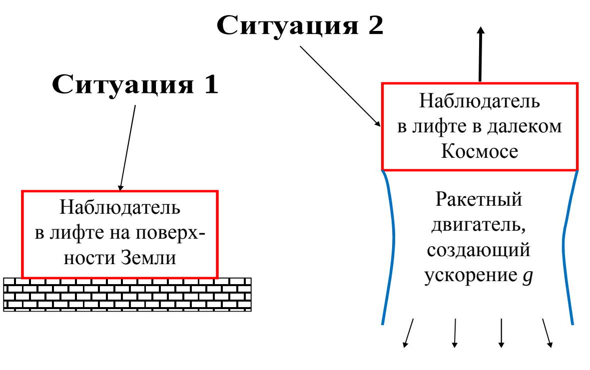

Рис. 1. Эксперимент «лифт Эйнштейна». События в ситуации 1 происходят так же, как и в ситуации 2

Эйнштейн привлек внимание к тому, что совершенно невозможно отличить падение тел под действием силы тяжести от падения под действием инерции. Таким образом, гравитация и инерция в некотором смысле приводят к одинаковым эффектам, т. е. они эквивалентны в пределах кабины лифта и ограниченного интервала времени. Указанную неразличимость Эйнштейн и называл принципом эквивалентности.

Другими словами, достаточно малая по размерам локальная физическая система, находящаяся в гравитационном поле, по поведению неотличима от такой же системы, находящейся в ускоренной (относительно инерциальной системы отсчета) системе отсчета, погруженной в плоское пространство–время СТО. Это проиллюстрировано на рис. 2 с помощью формул, заимствованных из работы [2].

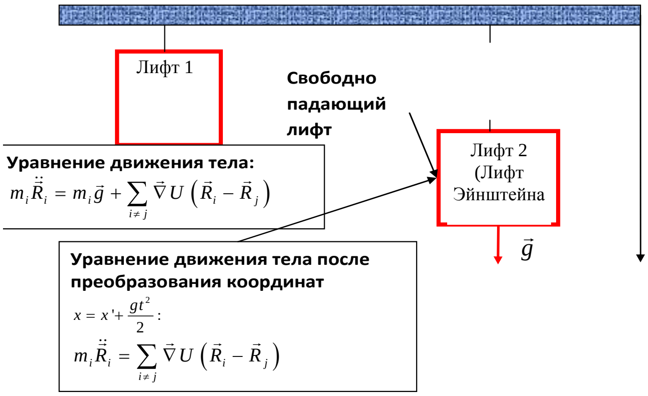

Рис. 2. Локальное устранение гравитации с помощью преобразования координат

Трактовка 2. Инертная и пассивная гравитационная массы любого тела совпадают. Вследствие чего все тела в гравитационном поле падают с одинаковым ускорением.

Эта формулировка ПЭ исходит из хорошо известного эмпирического факта – из результатов знаменитого (хотя, может быть, никогда и не проведенного) эксперимента Галилея, в котором два тяжелых тела с разными массами, сброшенные с Пизанской башни, достигали земли одновременно (рис. 3).

Рис. 3. Знаменитые эксперименты Галилея

Существуют два способа определения массы тела. Первый способ (инерциальный) заключается в измерении ускорения, сообщаемого телу известной силой; при втором (гравитационном) – измеряется притяжение тела к какой-нибудь близко расположенной массе (если в качестве такой массы служит Земля, то измеряется, следовательно, вес тела). Уже Ньютон находил весьма странным то, что оба способа определения массы дают одинаковые результаты в пределах ошибок эксперимента; что так и должно быть, по существу, следует из опыта Галилея. Эйнштейн возвел этот таинственный эмпирический факт в ранг принципа и, говоря о ПЭ, имел в виду эквивалентность ПЭ не только в трактовке 1, но и в трактовке 2. Однако трактовка 2 не тождественна трактовке 1. Не тождественна хотя бы по той причине, что формулировка ПЭ в трактовке 2 носит строгий характер, а в трактовке 1 – приближенный.

Трактовка 3. «Сильный ПЭ»: В окрестности любой точки 4-мерного риманова пространства можно выбрать координаты, при которых система отсчета станет локально инерциальной. При этом все законы физики примут такой вид, как в инерциальной системе специальной теории относительности (СТО).

Другими словами, в любой точке можно ввести ортонормированный репер, порождающий касательное пространство Минковского, в котором действуют законы СТО. То есть «сильный» ПЭ трактуется как локальная (по пространству и времени) справедливость СТО. Иллюстрация к «сильному ПЭ» приведена на рис. 4.

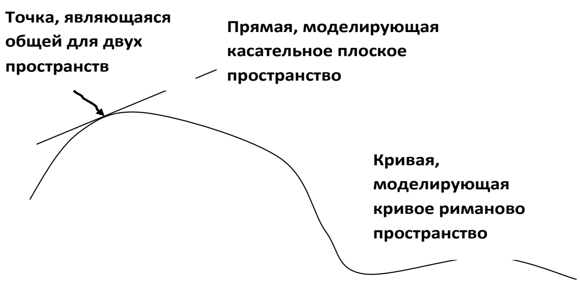

Рис. 4. Пояснения к «сильному ПЭ»

Трактовка 4. «Слабый ПЭ»: отличается от «сильного» ПЭ тем, что утверждение о локальной справедливости СТО распространяется не на все законы физики, а только на законы механики.

Трактовка 5. Все пробные тела, подверженные только гравитационному взаимодействию, движутся по геодезическим, независимо от их внутренней структуры.

2. Анализ трактовок ПЭ

Что мы имеем против ПЭ?

В трактовках 1 и 2 ПЭ является элементарным свойством сравнительно простых координатных преобразований. Действительно в небольшой области пространства–времени некоторые гравитационные поля могут быть приближенно заменены силовыми полями, вызывающими ускорение. Пример такой замены приведен на рис. 2. Возможности трактовок 1 и 2 вытекают из ОТО и не являются независимыми предписаниями для динамики гравитационного поля и материи.

В трактовках 3 и 4 этот принцип ПЭ вытекает из свойств римановой геометрии и вообще не несет ничего нового по сравнению с тем, что может дать геометрия.

Единственной трактовкой, требующей отдельного анализа, является трактовка 5. Последующее изложение и будет посвящено этому вопросу. Мы покажем, что бесструктурные пробные частицы движутся в гравитационном поле по геодезическим. Что касается спиновых пробных частиц, то траектории движения их центра масс в общем случае отличаются от геодезических. И в этом смысле трактовка 5 противоречит уравнениям ОТО и приемлема только при условии, если будет применяться к бесструктурным частицам.

3. Уравнения Матиссона – Папапетру

«Новый» взгляд на ПЭ базируется на уравнениях, которые были открыты более полувека назад и по установившейся традиции называются уравнениями М–П. Хотя, конечно, не только эти два человека были причастны к их открытию.

Мы уже говорили о том, что в ОТО не так много точных решений и строгих результатов. Уравнения М–П принадлежат к тому золотому фонду ОТО, который состоит из точных решений и строгих результатов ОТО. Уравнения М–П отражают геометрические свойства риманова пространства и автоматически согласованы с уравнениями ОТО.

Под согласованностью понимается следующее.

Если решать уравнения ОТО методом последовательных приближений – так называемым методом ЭИГ и в полученных уравнениях перейти к приближению пробной спиновой частицы, то будут воспроизведены уравнения М–П для точечных пробных частиц, движущихся в заданном гравитационном поле и обладающих массами и собственными угловыми моментами. К этому вопросу мы еще вернемся.

Перед тем, как записать уравнения М–П, введем обозначения и пояснения (см. табл. 1). Данная работа носит абстрактно-теоретический характер, и без символов и формул обойтись невозможно.

Уравнения М–П установлены в работах [3, 4] и имеют вид, приведенный ниже.

Уравнения М–П состоят, как видим, из уравнений двух типов:

– уравнения для траектории движения пробной частицы. Это уравнение определяет вектор ускорения, т. е. вектор, который указывает, как изменяется касательный вектор к траектории при перемещении частицы по траектории;

– динамического уравнения, определяющего эволюцию спина пробной частицы. Этими динамическими уравнениями мы заниматься не будем, поскольку они не имеют прямого отношения к ПЭ.

Убедимся в том, что в простейших ситуациях уравнения М–П приводят к вполне разумным результатам.

Допустим, спин частицы равен нулю. Тогда остается только первое уравнение, в котором правая часть обращается в нуль. Уравнение принимает вид уравнения геодезической – вектор касательной переносится вдоль траектории движения параллельным образом, $Du^{\alpha}/D\tau = 0$. Все пробные частицы при одних и тех же начальных данных движутся по одним и тем же траекториям. Эти траектории являются геодезическими. Мы приходим к тем формулировкам, которые приводили выше как трактовку ПЭ под номером 5 для бесструктурных пробных частиц.

Таблица 1

Обозначения и пояснения

Обозначения	Пояснения
$g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, $R_{\alpha\beta} \equiv R_{\mu\alpha\nu\beta} g^{\mu\nu}$	Метрический тензор, тензор кривизны (Римана), тензор Риччи
$x^{\alpha}(\tau)$	Траектория частицы (мировая линия), заданная в параметрической форме
τ	Параметр траектории (собственное время частицы)
$d\tau = \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^{\alpha}(\tau) dx^{\beta}(\tau)}$	Приращение собственного времени частицы при перемещении по траектории на вектор с компонентами $dx^{\alpha}(\tau)$
$u^{\alpha}(\tau) \equiv \dfrac{dx^{\alpha}(\tau)}{d\tau}$	Вектор 4-мерной скорости частицы (касательный вектор к траектории); $u^{\alpha}u^{\beta}g_{\alpha\beta} \equiv u^2 = -1$. Безразмерная величина
$F^{\lambda}{}_{;\alpha} = F^{\lambda}{}_{,\alpha} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} F^{\beta}$	Определение ковариантной производной от некоторого вектора F^{α}
$u^{\mu} F^{\alpha}{}_{;\mu} \equiv \dfrac{DF^{\alpha}}{D\tau}$	Ковариантная производная от некоторого вектора F^{α} вдоль направления вектора u^{μ}
s^{α}	Приведенный собственный угловой момент частицы (спин). Величина с размерностью длины
$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv E_{\alpha\beta}{}^{\tau\rho} R_{\tau\rho\mu\nu}$	Тензор кривизны, дуальный к тензору Римана

Теперь допустим, что частица является пробной спиновой частицей, но ее движение происходит в плоском пространстве. Тогда правые части в уравнениях М–П обращаются в нуль, частицы движутся по геодезическим. Если в предыдущей ситуации спин был равен нулю, то в этой ситуации спин не равен нулю, закон его эволюции сводится к тому, что он переносится по мировой линии частицы параллельным образом.

Важной особенностью уравнений М–П является то, что для их справедливости достаточно лишь предположения, что частица является пробной. Малость гравитационного поля не предполагается. Поэтому с помощью уравнений М–П можно рассматривать движение пробных частиц в том числе и в областях вблизи сингулярностей гравитационного поля.

Уравнения Матиссона – Папапетру:

– уравнение, определяющее траекторию движения центра масс пробной спиновой частицы

$$\frac{Du^{\alpha}}{D\tau} = -\frac{1}{2}\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}u^{\beta}u^{\mu}s^{\nu};$$

– уравнение, определяющее эволюцию со временем спинового вектора пробной спиновой частицы

$$\frac{Ds_{\lambda}}{D\tau} = u_{\lambda}\left(s_{\varepsilon}\frac{Du^{\varepsilon}}{D\tau}\right).$$

4. Применение уравнения Матиссона – Папапетру к пробной спиновой частице в поле Керра

Метрика Керра $g_{\alpha\beta}$ в области слабого поля представляется суммой метрического тензора пространства Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ и малого тензора $h_{\alpha\beta}$. Компоненты малого тензора $h_{\alpha\beta}$ разлагаются по безразмерным параметрам (M/R) и (J/R). В этих формулах используются параметры только того тела, которое порождает гравитационное поле.

Теперь в окрестности Земли помещаем другое тело, которое будет представлять собой пробную спиновую частицу. Схема двухчастичной задачи, одна из которых порождает поле, а другая является пробной, представлена на рис. 5.

Спрашивается, по каким законам пробная спиновая частица будет совершать свое движение? Ясно, что по уравнениям М–П. Запишем эти уравнения, адаптируя к гравитационному полю Земли, и покажем, какие аспекты трактовок ПЭ будут при этом оставаться в силе.

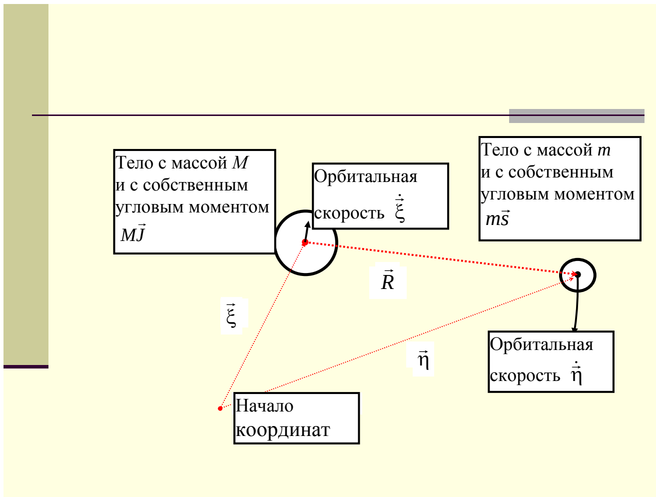

Рис. 5. Пояснения к задаче о движении спиновой пробной частицы в гравитационном поле Земли

Разложение метрики решения Керра

Гравитационное поле порождается телом с массой M и с приведенным собственным угловым моментом J_k.

Разложения компонент метрики решения Керра, записанного в гармонических координатах:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}; \quad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta};$$

$$h_{00} = 2\frac{M}{R}; \quad h_{0k} = 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}; \quad h_{mn} = 2\frac{M}{R}\delta_{mn};$$

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2\frac{M}{R}; \\ g_{0k} &= 2\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}; \\ g_{mn} &= \delta_{mn} + 2\frac{M}{R}\delta_{mn}. \end{aligned}\right\}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}[-1,1,1,1] \qquad \left|h_{\alpha\beta}\right| \ll 1.$$

Подставляем разложения для метрики Керра в первое уравнение М–П и получаем уравнение для мировой линии частицы в гравитационном поле Земли.

$$\ddot{\eta}_k = -\frac{M}{R^3}R_k - \frac{M(\dot{\eta}_l\dot{\eta}_l)}{R^3}R_k + 4\frac{M(R_l\dot{\eta}_l)}{R^3}\dot{\eta}_k + 4\frac{M^2}{R^4}R_k -$$

$$-\frac{M}{R^3}\left\{-6\frac{(s_{kl}R_l)(R_l\dot{\eta}_l)}{R^2} + 3(s_{kl}\dot{\eta}_l) + 3\frac{(\dot{\eta}_a s_{ab}R_b)R_k}{R^2}\right\} +$$

$$+6\frac{M(J_{kl}R_l)(R_l\dot{\eta}_l)}{R^5} - 4\frac{M(J_{kl}\dot{\eta}_l)}{R^3} - 6\frac{M(\dot{\eta}_a J_{ab}R_b)R_k}{R^5} -$$

$$-\frac{M}{R^5}\left\{3(J_lR_l)J_k - \frac{15}{2}\frac{(J_lR_l)^2R_k}{R^2} + \frac{3}{2}(J_lJ_l)R_k\right\} -$$

$$-\frac{M}{R^5}\left\{-3(J_{ab}s_{ab})R_k + 3(J_{kp}s_{pl}R_l) + 3(s_{kp}J_{pl}R_l) - 15\frac{(R_a s_{ap}J_{pb}R_b)R_k}{R^2}\right\},$$

Пояснения к задаче о движении спиновой пробной частицы в гравитационном поле Земли: η_k – координата пробной частицы; R_k – радиус-вектор, направленный от массивного тела, порождающего гравитационное поле, к пробной частице

Правая часть этого уравнения записана в виде пяти строчек. Первый член в правой части соответствует ньютоновскому приближениию. Этот член достаточен для объяснения результатов Галилея, полученных на Пизанской башне. Все остальные члены являются членами пост-ньютоновского приближения. Рассмотрим несколько ситуаций.

Ситуация, когда остаются ньютоновский член и член, стоящий в верхней строчке. Это соответствует случаю, когда равны нулю спины J_k, s_k, т. е. пробная частица является бесструктурной, а большое тело порождает гравитационное поле Шварцшильда. Уравнение М–П в этом случае совпадает с уравнениями геодезических в шварцшильдовском поле гравитации.

Ситуация, когда остаются все члены, за исключением членов в нижней строчке. Это соответствует случаю, когда равен нулю спин пробной частицы, т. е. пробная частица является бесструктурной, а большое тело порождает гравитационное поле Керра. Уравнение М–П в этом случае совпадает с уравнениями геодезических в керровском поле гравитации.

Ситуация, когда остаются все члены. Особый интерес привлекают при этом члены, содержащие компоненты спина пробной частицы, т. е. члены, содержащиеся во второй, третьей и четвертой строчках. Эти члены возникают из правой части уравнения М–П и, к сожалению, часто опускаются в некоторых известных публикациях (см., например, [5]). Отбрасывание этих членов приводит к выводу о том, что траектория движения спиновой частицы совпадает с геодезической в поле Керра. Такое движение спиновой пробной частицы противоречит уравнению М–П.

Таким образом, новый взгляд на ПЭ утверждает, что траектории пробных спиновых частиц не совпадают ни между собой, ни с геодезическими. Различия зависят от спина пробной частицы. Этот вывод является следствием нашего понимания роли уравнений М–П и, очевидно, противоречит версии ПЭ, требующей, чтобы движение частиц происходило по геодезическим независимо от их внутренней структуры.

Поразительным фактом является то, что приведенное уравнение из пяти строчек совершенно точно совпадает с тем уравнением, которое получается, если уравнения ОТО решать приближенным методом Эйнштейна – Инфельда – Гоффмана, а затем перейти к приближению пробной частицы. На этом пути уравнение из пяти строчек было получено, например, в работе [6]. Этот факт мы рассматриваем как прямое указание на то, что уравнения М–П согласованы с уравнениями ОТО.

5. Резюме по применению уравнения Матиссона – Папапетру к пробной спиновой частице в поле Керра

По результатам представленных материалов мы считаем возможным суммировать наши представления о «новой» трактовке ПЭ в ОТО так, как показано в табл. 2. Поскольку «новый» взгляд на ПЭ – это то, что вытекает из уравнений ОТО, то, по-видимому, имеет смысл вообще отказаться от термина ПЭ, а говорить о следствиях уравнений ОТО.

Таблица 2

Сравнение «старой» и «новой» трактовок ПЭ

Тип пробной частицы	«Старая» трактовка	«Новая» трактовка
Бесструктурная $m \neq 0$ $\vec{s} = 0$	При одних и тех же начальных данных частицы движутся по одним и тем же траекториям, которые являются геодезическими	
Пробная частица с $m \neq 0$ $\vec{s} \neq 0$	Утверждение о невыполнении ПЭ для траекторий спиновых частиц обычно произносится вполголоса	При одних и тех же начальных данных частицы движутся по разным траекториям, зависящим от спина

6. Возможные эксперименты по проверке отклонения траектории движения пробной спиновой частицы от геодезической

Подтвердить или опровергнуть «новый» взгляд на ПЭ можно, если сравнить траектории двух расположенных поблизости спиновых пробных частиц, у которых спины ориентированы в противоположные стороны. Идея постановки эксперимента очень проста, но реализация, по-видимому, потребовала бы тщательных и длительных наблюдений.

Рис. 6. Первый вариант проверки «новой» трактовки ПЭ

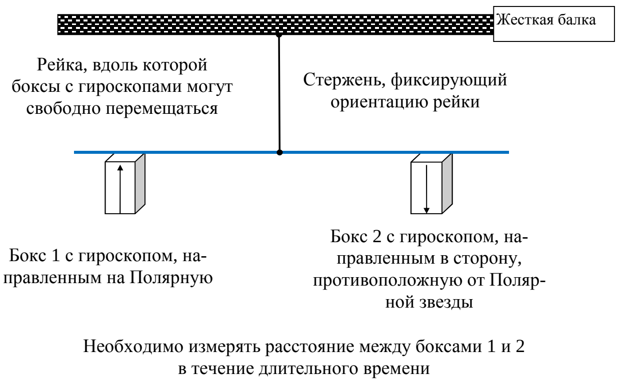

Рис. 7. Второй вариант проверки «новой» трактовки ПЭ

Если гироскопы (см. рис. 6, 7) поместить в боксы, способные перемещаться вдоль рейки, направить гироскопы в противоположные стороны (например, в сторону Полярной звезды и в противоположную сторону) и поддерживать вращение гироскопов время от времени ускоряя их замедляющееся вращение, то, согласно нашему пониманию закона движения спиновых пробных частиц, гироскопы должны либо сближаться, либо удаляться.

Масштаб изменения расстояния между гироскопами в предположении, что основной вклад вносят члены, содержащие спин, приведен на этом слайде. Если эксперимент и возможен, то он будет длиться долго и потребует очень тщательных измерений. Оценки показывают, что за время измерения в 5 лет масштаб изменения расстояния между гироскопами составит всего 1 мм.

Оценки масштаба изменения расстояния между гироскопами за время наблюдения

$$\Delta x \sim \frac{M}{R}\left(\frac{ct}{R}\right)^2 \frac{(d\eta/dt)}{c} s\,;$$

$$\frac{M}{R} \sim \frac{0,45}{6,4\cdot 10^8} = 0,7\cdot 10^{-9};$$

$$s \sim \frac{r^2\,\nu}{c} \sim \frac{100\cdot 500}{3\cdot 10^{10}} = 1,7\cdot 10^{-6}\ \text{см};$$

$$\frac{(d\eta/dt)}{c} \sim \frac{4\cdot 10^9}{24\cdot 3600\cdot 3\cdot 10^{10}} = 1,5\cdot 10^{-6}.$$

При $t = 5$ лет $\Delta x \sim 1$ мм.

Выводы

Представленные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. ОТО – самодостаточная теория и независимое введение каких бы то ни было принципов не является обязательным. Если все-таки дополнительные принципы вводятся, то они должны быть согласованы с уравнениями ОТО.
2. Движение пробных спиновых частиц описывается в ОТО уравнениями М–П. Уравнения получаются геометрическими методами и потому пригодны для любого риманова пространства. Для поля Керра уравнения М–П подтверждаются результатами решения задачи о движении пробной частицы методом Эйнштейна – Инфельда – Гоффмана.
3. Уравнения М–П утверждают, что мировые линии бесструктурных пробных частиц совпадают с геодезическими. В то же время, мировые линии спиновых частиц не совпадают ни между собой, ни с геодезическими, и в этом смысле ПЭ в трактовке 5 (см. раздел 1) не выполняется.

Второй вывод может вызвать возражение у тех специалистов по гравитации, которые полагают, что траектория движения центра масс частицы в принципе не может зависеть от внутренней структуры частицы, в частности от наличия или отсутствия спина. Но если принимаются уравнения М–П, то ничего иного, кроме второго из приведенных выводов, получить невозможно.

Имеется еще категория таких специалистов по гравитации, которые рассматривают ПЭ как некоторую священную корову и слышать не хотят о том, что введенный не кем-нибудь, а самим Эйнштейном принцип может где-то не работать. Ошибка таких гравитационистов состоит в непонимании того, что ограничение области применимости ПЭ означает не посягательство на справедливость уравнений ОТО, а «очищение» их от всего того, что этим уравнениям противоречит. «Очищение» может привести к интересным следствиям при исследовании движения пробных частиц в области сильных гравитационных полей. Если пробная спиновая частица имеет внутреннюю структуру, то ее составные части будут по-разному взаимодействовать с полем. В результате пробная частица неизбежно превратится в систему, разваливающуюся под действием гравитационного поля при приближении к сингулярности. Хотя следствие такого типа получено относительно классических пробных частиц, но оно, скорее всего, справедливо и для таких частиц, как протон, т. е. для микрочастиц, состоящих из кварков с полуцелым спином.

Список литературы

1. Эйнштейн А. О статье Ф. Коттлера «Гипотеза эквивалентности Эйнштейна и гравитация» // Собрание научных трудов. Том 1. М.: Наука, 1965.
2. Вейнберг С. Гравитация. Космология. Волгоград: «Платон», 2000.
3. Mathisson M. // Acta Phys. Pol. 1937. Vol. 6. P. 163.
4. Papapetrou A. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1951. Vol. A209. P. 248.
5. Khriplovich I. B. Spinning Relativistic Particles in External Fields. E-print. arXiv: 0801.1881v1 [gr-qc]).
6. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.

Статья поступила в редакцию 09.11.2010.